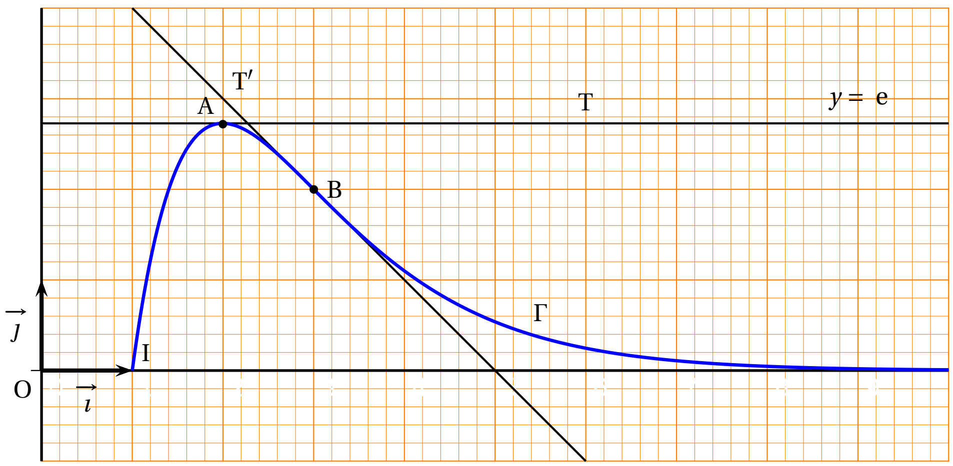
Baccalauréat ES Liban juin 2001

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur le document ci-dessous, le graphique est celui de la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.



La courbe Γ passe par les points I(1 ; 0), A(2 ; e) et B(3 ; 2) où : e = exp (1). La droite T est tangente à Γ au point A et elle est parallèle à l'axe des abscisses.
La droite T′ est tangente à Γ en B et elle passe par le point de coordonnées (5 ; 0).
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ.

1. À l'aide d'une lecture graphique :

a. Donner les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, puis de $f'(2)$ et $f'(3)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Déterminer une équation de la droite T′.

c. Donner la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f ; donner le signe de f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

2. La fonction g est définie, pour tout x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, par
$g(x) = \ln(f(x)$.

a. Donner les valeurs de $g(2)$, $g(3)$, puis de $g'(2)$ et $g'(3)$, où g' désigne la fonction dérivée de g.

b. Déterminer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

c. Dresser en le justifiant le tableau de variations de g sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

d. En utilisant la courbe représentative Γ de la fonction f, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un jeu de société est composé d'un grand nombre de fiches qui proposent chacune trois questions indépendantes : la première porte sur la géographie, la seconde sur l'histoire et la troisième sur les arts. À tour de rôle, chaque joueur tire une fiche au hasard et doit répondre aux trois questions dans l'ordre où elles sont proposées.
Le meneur de jeu remplit un bulletin réponse :

G	H	A

dans lequel, pour chaque question, il reporte F si la réponse est fausse, J si elle est juste. Ainsi, si le joueur a bien répondu aux questions sur la géographie et sur les arts, mais n'a pas trouvé la bonne réponse à la question sur l'histoire, le bulletin réponse à cette fiche sera :

G	H	A
J	F	J

Le résultat sera noté : JFJ.

1. **a.** Donner la liste des huits résultats différents que l'on peut obtenir pour une fiche.
   b. À chaque bulletin réponse est attribuée une note : une réponse juste, J, fait gagner 5 points ; une réponse fausse ou l'absence de réponse, F, fait perdre 2 points.
   Donner la liste des résultats qui conduisent à un total de 8 points.
2. La probabilité que Marc donne la réponse juste à une question, qu'elle soit sur la géographie, sur l'histoire ou sur les arts, est de 0,6.
   Marc tire une fiche et répond aux trois questions.
   a. Quelle est la probabilité que Marc obtienne le bulletin réponse cité en exemple ci-dessus ?
   b. Montrer que la probabilité que son bulletin réponse conduise à une note de 8 points est 0,432.
3. On appelle X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Marc pour un bulletin réponse.
   a. Préciser toutes les valeurs (positives ou non) prises par X.
   b. Établir la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Maud vise une cible avec une fléchette. La probabilité qu'elle atteigne la cible est $\frac{2}{3}$.
Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

1. Si Maud effectue cinq lancers successifs, quelle est la probabilité qu'elle atteigne exactement deux fois la cible ?
2. Maud et Paul décident de jouer des billes avec la règle du jeu suivante :
   - Maud mise des billes puis lance une fléchette.
   - Avant le premier lancer, Maud mise une bille.
   - À chaque lancer :
   • si elle rate la cible, elle perd sa mise que Paul récupère ; le jeu continue ; elle triple sa mise avant de lancer une nouvelle fléchette ;
   • si elle atteint la cible, elle récupère sa mise et Paul lui donne autant de billes que ce qu'elle vient de miser ; le jeu s'arrête.
   On suppose dans cette question que le jeu n'est pas limité par le nombre de billes.
   a. Soit a_n la mise de Maud avant le $(n+1)$-ième lancer. Ainsi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
   Donner les valeurs de a_2 et a_3.
   Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
   En déduire la valeur de a_n en fonction de n.
   b. Maud a raté la cible aux n premiers lancers : elle a donc perdu les mises $a_0,\ a_1, \cdots, a_{n-1}$.
   Montrer qu'elle a perdu $\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$ billes depuis le début du jeu.

3. Lorsque Maud et Paul commencent le jeu défini dans le 2., ils ont chacun 160 billes.
   a. Si Maud perd à toutes les parties successives, quel est le nombre k maximum de lancers qu'elle peut effectuer ?
   b. Quelle est la probabilité que cette situation se réalise et que Maud atteigne la cible au k-ième lancer ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le document ci-après est à compléter et à rendre avec la copie.
La fonction h est définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1).$$

1. Montrer que : $h'(x) = \dfrac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$, h' désignant la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\,;8]$.
2. Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0\,;8]$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;8\right]$.
   Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 0,01 près.
4. Déduire des résultats précédents le signe de h sur l'intervalle $[0\,;8]$.

Partie B

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$M(x) = x + \frac{8}{2x+1}.$$

La fonction C_{T} est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0\,;8]$ qui s'annule pour $x = 0$. Calculer $C_{\text{T}}(x)$.

Partie C

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la **partie B.**. Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers de francs.
On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à $\left[\frac{1}{4}\,;8\right]$ par la fonction C_{T} définie dans la **partie B**.

1. **a.** Vérifier que le coût moyen, par millier d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;8\right]$ par :

$$C_m(x) = x + 4\frac{\ln(2x+1)}{x}.$$

   b. Calculer $C'_m(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C.
   c. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;8\right]$, $C'_m(x) = \dfrac{h(x)}{2x^2}$, où h est la fonction étudiée dans la **partie A.**.
   d. Étudier les variations de la fonction C_m, et dresser son tableau de variations.
2. **a.** Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par millier d'appareils, est-il minimum ?
   b. Vérifier que, pour cette valeur approchée de la production, le coût moyen et le coût marginal ont la même valeur, à 5 francs près.

3. Le graphique donné ci-après est celui de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction M dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, où 2 cm représentent 1 000 appareils sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 000 F sur l'axe des ordonnées.

a. On note $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction C_m dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ sur le document donné ci-après.

b. Par une lecture graphique que l'on expliquera, retrouver le résultat de la question **2. b.**.