ൟ Baccalauréat ES Liban mai 2008 ൟ

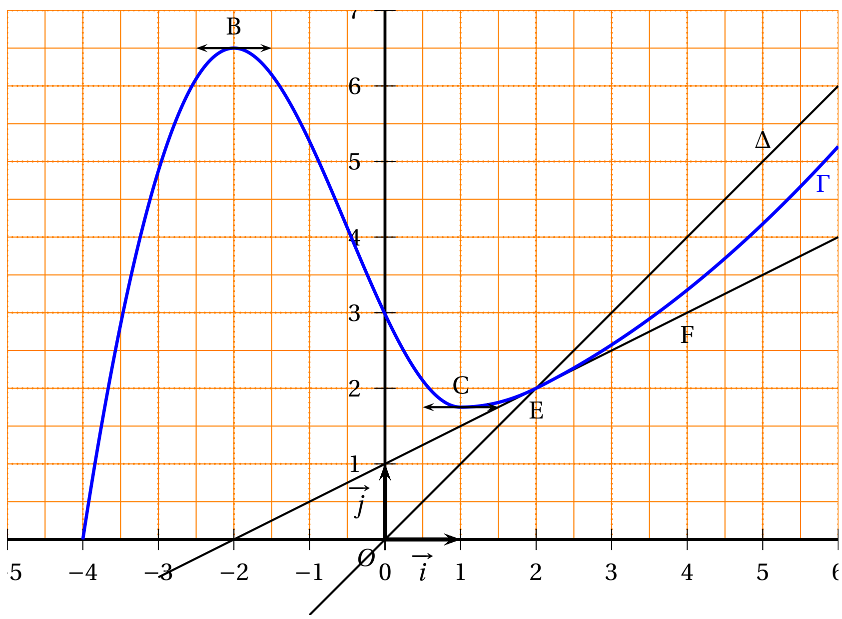
Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$. On note f' sa fonction dérivée.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

— la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B$(-2\ ;\ 6,5)$ et C$(1\ ;\ 1,75)$,

— la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées $(4\ ;\ 3)$



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

a. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;

b. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f'(x) \geqslant 0$;

c. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f(x) \leqslant x$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-4\ ;\ 6]$ par $g(x) = \ln[f(x)]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :

a. les variations de g ;

b. la limite de la fonction g quand x tend vers -4.

3. Encadrement d'une intégrale

Dans cette question, toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement I.

b. Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif.
Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que :
40 % des membres sont des hommes.
65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.
Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.
On choisit une fiche au hasard et on considère les évènements suivants :

— H : « la fiche est celle d'un homme »,
— F : « la fiche est celle d'une femme »,
— C : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

Rappel de notation : Si A et B sont deux évènements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité de A et $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. Donner les probabilités suivantes : $p(H)$, $p_F\left(\overline{C}\right)$, $p_F(C)$ et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.

2. **a.** Déterminer $p(F \cap C)$.

b. Montrer que $p(H \cap C) = 0,08$.

c. On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ?

d. Compléter l'arbre pondéré de la question 1.

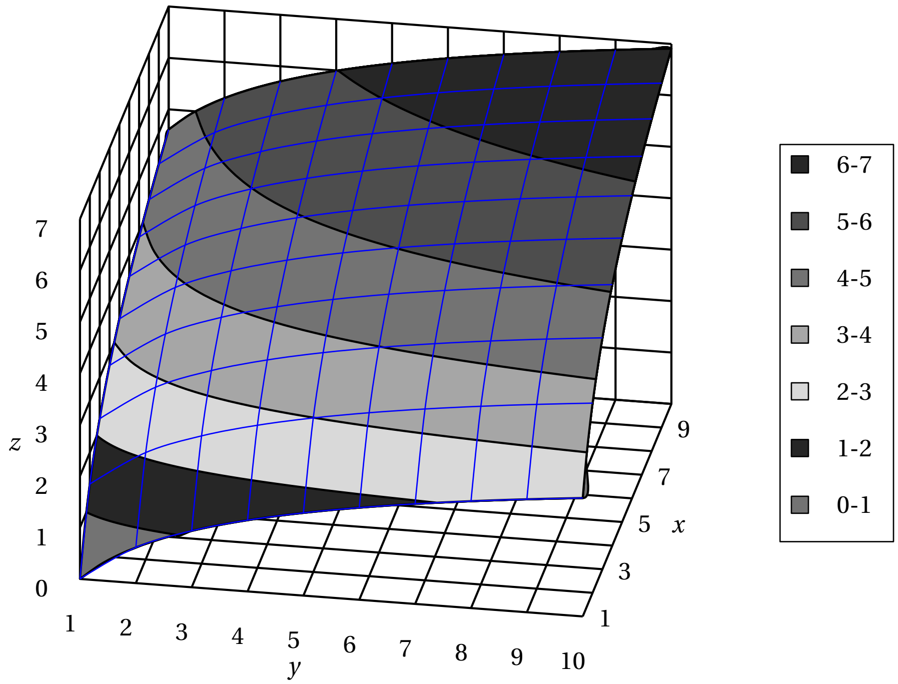
3. On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme ? (donner la valeur décimale arrondie au centième).

4. Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite. Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ?

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une consommatrice apprécie deux types de fruits $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. En un mois, elle achète x kilos de fruits $\mathscr{A}$ et y kilos de fruits $\mathscr{B}$; x et y appartiennent à l'intervalle $[1\,;\,10]$.
Son niveau de satisfaction est modélisé par la relation $f(x\,;\,y) = \ln y + 2\ln x$.
La figure ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface d'équation $z = f(x\,;\,y)$ pour $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$.



1. Le point N, d'ordonnée 5 et de cote $\ln 30$, appartient à la surface. Calculer la valeur exacte de son abscisse.

2. On peut estimer que le kilo de fruits $\mathscr{A}$ coûte 3 euros et que celui de fruits $\mathscr{B}$ coûte 2 euros. La consommatrice décide de ne pas dépenser plus de 36 euros par mois pour ces fruits.

a. Donner la relation entre les quantités x et y de fruits $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ achetées pour un montant de 36 euros.

b. Montrer qu'alors le niveau de satisfaction de la consommatrice est égal à $\ln(18 - 1,5x) + 2\ln x$.

c. Démontrer que, sur l'intervalle $[1~;~10]$, la fonction g définie par $g(x) = \ln(18 - 1,5x) + 2\ln x$ admet un maximum pour une valeur x_0 que l'on précisera.

d. Quelles quantités de fruits $\mathscr{A}$ et de fruits $\mathscr{B}$ la consommatrice doit-elle acheter dans le mois si elle veut optimiser son niveau de satisfaction tout en respectant sa contrainte de budget ?

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x de $[0~;~+\infty[$, on a : $f'(x) = (-0,5x - 3)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = (-2x-20)\mathrm{e}^{-0,5x}$ est une primitive de f sur ce même intervalle.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près.

Partie B : Applications économiques

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros.

2. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros.

3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de x.
On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :
$E(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \times x$.

a. Démontrer que $E(x) = \dfrac{-0,5x^2 - 3x}{x+8}$.

b. Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et interpréter ce résultat.

c. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.
Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ?

Exercice 4 — 4 points

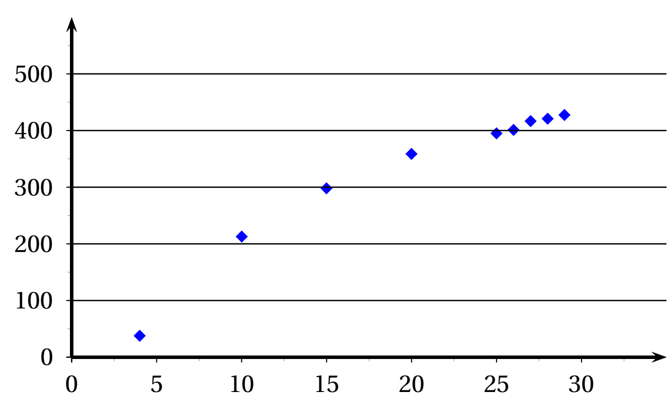
Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la production d'électricité d'origine nucléaire en France, exprimée en milliards de kWh, entre 1979 et 2004. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 1975.

Année	1979	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	4	10	15	20	25	26	27	28	29
Production y_i	37,9	213,1	297,9	358,8	395,2	401,3	416,5	420,7	427,7

Source : site Internet ministère de l'industrie

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



A - Recherche d'un ajustement affine

1. Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).
2. **a.** D'après cet ajustement, quelle serait la production d'électricité nucléaire en France en 2005 ?

   b. En réalité, en 2005, la production d'électricité nucléaire a été de 430 milliards de kWh. Calculer le pourcentage de l'erreur commise par rapport à la valeur réelle, arrondi à $0,1$ % près, lorsqu'on utilise la valeur fournie par l'ajustement affine.

B - Un autre modèle

Compte tenu de l'allure du nuage de points, on choisit un ajustement logarithmique et on modélise la production d'électricité nucléaire par la fonction f définie pour tout x de $[4\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 197 \ln x - 237.$$

1. Calculer la production d'électricité nucléaire prévisible avec ce modèle pour l'année 2005. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2. **a.** Résoudre dans $[4\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 460$.

   b. Avec ce modèle, en quelle année peut-on prévoir que la production d'énergie nucléaire dépassera 460 milliards de kWh ?