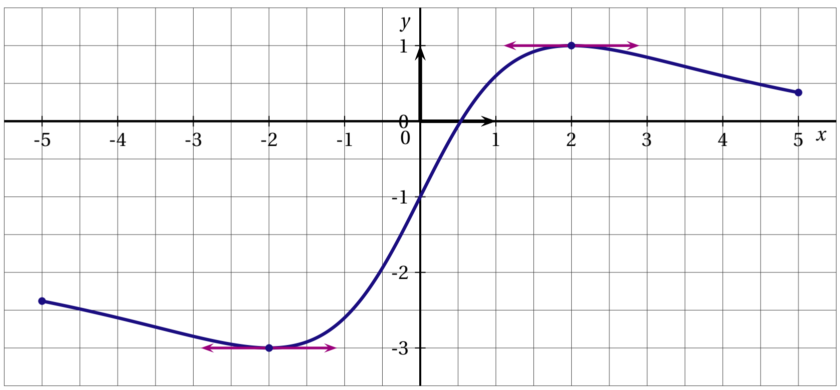
Baccalauréat ES Liban 29 mai 2012

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Pour chaque question, indiquer par **a.**, **b.**, **c.** l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.*

On considère la représentation graphique ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ telle que :

- f s'annule en $0,5$.
- La courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2 et une tangente horizontale au point d'abscisse 2.



On notera f' la la fonction dérivée de f.

1. Sur $[-5 ; 5]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement :

a. 0 solution **b.** 1 solution **c.** 2 solutions

2. Sur $[-5 ; 5]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

a. $[-2 ; 2]$ **b.** $[0 ; 5]$ **c.** $[0,5 ; 5]$

3. La fonction g telle que $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$ est définie sur :

a. $[-2 ; 2]$ **b.** $]0 ; 1]$ **c.** $]0,5 ; 5]$

4. On note $S = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ alors :

a. $0 < S < 1$ **b.** $1 < S < 2$ **c.** $2 < S < 3$

Exercice 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

1re partie : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 8$.

1. En écrivant que $f(x) = \mathrm{e}^x(x-1) - 8$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que $f'(x) = x\text{e}^x$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations complet de de f sur $[0~;~+\infty[$.

4. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0~;~+\infty[$ une unique solution a.

b) Montrer que $2,040 < a < 2,041$.

c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0~;~+\infty[$.

5. **a)** Montrer que la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = x\text{e}^x - 2\text{e}^x - 8x$ est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\text{d}x$.

2^e^ partie : Application à une situation économique

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0~;~5]$.
La fonction f de la 1^re^ partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaine d'euros.
Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

En utilisant les résultats de la 1^re^ partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. À partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $[3~;~5]$ (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

— une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur-soin »,

— des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

— 40 % des clientes demandent une « couleur-soin ».

— parmi celles qui n'en veulent pas, 30 % des clientes demandent un « effet coup de soleil ».

— de plus, 24 % des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.
On notera C l'évènement « *la cliente souhaite une "couleur-soin"* ».
On notera M l'évènement « *la cliente souhaite un "effet coup de soleil"* ».

1. Calculer la probabilité de M sachant C notée $P_C(M)$.

2. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.

3. Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».

4. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,42.

5. Les évènements C et M sont-ils indépendants ?

6. Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

b) Donner l'espérance E de cette loi.

c) *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15 % ?

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En pédiatrie (médecine des enfants), des études statistiques sur des enfants de moins de 36 mois ont permis de tracer les deux courbes fournies en annexe. Pour un âge x donné en mois, la courbe inférieure C_1 donne le périmètre crânien minimal en centimètres, et la courbe supérieure C_2 donne le périmètre crânien maximal en centimètres.
Ces deux courbes sont souvent utilisées pour observer le développement des enfants.

A. Lectures graphiques

À l'aide du graphique fourni en annexe, répondre aux deux questions suivantes en laissant les traits de construction apparents :

1. Un enfant a un périmètre crânien égal à 41 cm.
Déterminer l'âge minimum et l'âge maximum que peut avoir cet enfant.

2. Un enfant a un âge compris entre 15 et 21 mois.
Déterminer le périmètre crânien minimum et le périmètre crânien maximum que peut avoir cet enfant.

B. Étude d'un modèle

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
Le pédiatre ne disposant pas de données d'individus de plus de 36 mois sur son lieu d'étude, il considère les valeurs moyennes des deux courbes précédentes.
Il obtient les mesures suivantes :

Âge x (en mois)	0	12	24	36
Périmètre crânien y (en cm)	36	46	48	50

1. On considère $z = \ln(54 - y)$.
Recopier puis compléter le tableau suivant :

Âge x en mois	0	12	24	36
z				

2. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en fonction de x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

b) En déduire que $y = 54 - \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a \approx -0,04$ et $b \approx 2,76$.

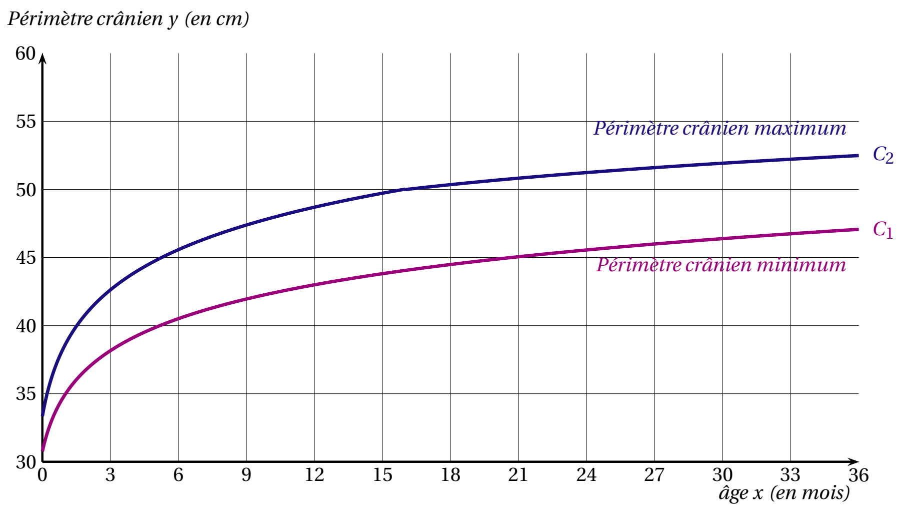
C. Utilisation du modèle précédent

Dans cette partie, on utilisera le modèle établi dans la question **2. b.** de la partie **B**.

1. Un enfant a un périmètre crânien de 53 cm.
Déterminer par le calcul une approximation de l'âge en mois de cet enfant.

2. Les scientifiques estiment que la structure osseuse crânienne se rigidifie dès l'âge de 15 ans, le périmètre crânien cesse alors de croître.
Déterminer par le calcul une approximation du périmètre crânien correspondant. Arrondir au centimètre près.

Annexe à remettre avec la copie



Courbes obtenues à partir de l'étude séquentielle française de la croissance CIE-INSERM (M. Sempé)

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

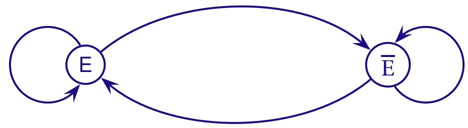
Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue $\left(\text{E ou } \overline{\text{E}}\right)$, la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}\text{M}$.

3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.

4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}\text{N}$.

3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

4. Exprimer p_n en fonction de n.

5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.

6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.