

Baccalauréat S Liban juin 1999

Exercice 1

4 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3 + i$, $7 - i$, $-1 - 7i$, $8 - 4i$ respectivement.

1. **a.** Placer les points A, B, C, D.
b. Quelle est la nature du triangle ABC?
2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
 On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.
3. À tout point M d'affixe z , avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{10}{z}$.
a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a' , b' , c' des points A' , B' , C' (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A' , B' , C' .
b. Vérifier que : $\frac{c' - a'}{b' - a'} = 2$.
c. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.
d. Que peut-on en déduire pour les points A' , B' , C' ?

Exercice 2 (obligatoire)

5 points

Sur une droite (D) muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3 . Pour tout entier naturel n , on note

A_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$

B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1 .
2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement.
 Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
 Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.
b. En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$.
4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n .
b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.
c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

Exercice 2 (spécialité)

5 points

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b .

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.
2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d .
3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.
b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
 Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
 Pour quelles valeurs de r , d est-il égal à 1 ?

Problème

11 points

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur \mathbb{R} par :

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

1. **a.** Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
b. Vérifier que, pour tout réel x : $\varphi(x) = -\varphi''(x) - 2\varphi'(x)$.
2. Démontrer que φ admet une primitive Φ , définie sur \mathbb{R} par : $\Phi(x) = (Ax + B)e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b .
3. Déterminer a et b pour que : $\varphi(0) = 5$ et $\varphi'(0) = -3$.
 Donner alors $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\varphi(x) = (2x + 5)e^{-x}.$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f .

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (\mathcal{C}) avec les axes du repère.
3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f .
4. Soit I le point de la courbe (\mathcal{C}) d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
 Une équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point I est $y = g(x)$.
 Déterminer $g(x)$.
5. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.
 - a.** Étudier le sens de variation de d' , calculer $d'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d' .
 - b.** Étudier le sens de variations de d , calculer $d\left(-\frac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d .
 - c.** Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (\mathcal{C}) .
6. Tracer la courbe (\mathcal{C}) et la tangente (T).
7. Soit α un réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations $x = -\frac{5}{2}$ et $x = \alpha$.
 Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$. (On peut éventuellement utiliser le résultat de la **partie I**).
 Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.