∽ Baccalauréat S Liban juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :

$$P(E),\ P(F/E),\ P\left(F/\overline{\mathrm{E}}\right) \text{ puis } P(F\cap E) \text{ et } P\left(F\cap\overline{\mathrm{E}}\right).$$

En déduire $P(F)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 1 + 2\mathrm{i}$.

1. Exprimer le complexe $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

Partie B

Désormais on considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
On considère les points A(3 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 0), C(3 ; 2 ; 1) et $D(0\,;0\,;d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre ABCD.

1. On pose $\vec{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   a. Calculer les coordonnées de N.
   b. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   a. On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{\text{N}}$.
   Calculer λ en fonction de d.
   b. En déduire l'expression de la distance DH.
   Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $\text{V}_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\Omega\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.
On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $\text{S}_3 \circ \text{S}_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

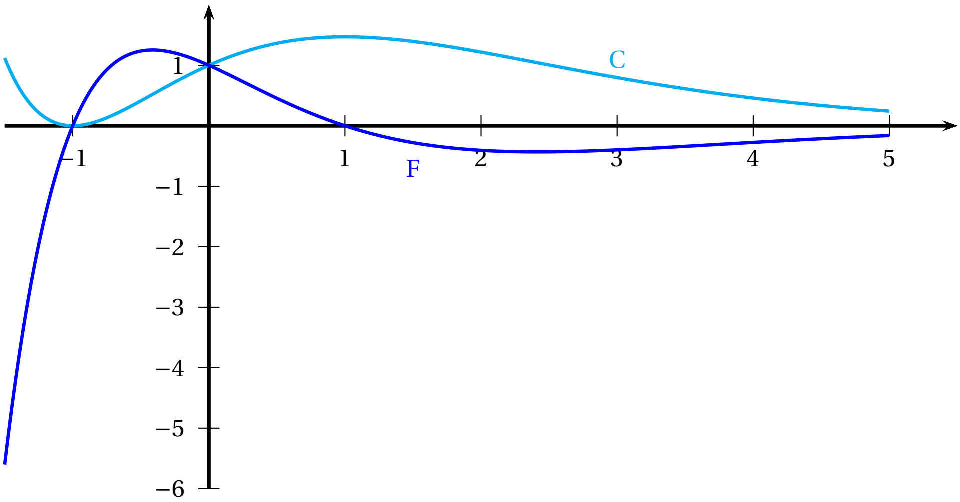
1. Tracer ces trois droites.
2. **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = \text{S}_2 \circ \text{S}_1$.
   b. Caractériser la réflexion S telle que $r = \text{S}_3 \circ \text{S}$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$. Tracer la droite D.
   c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Justifier que le point E d'affixe $z_\text{E} = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
   Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.
2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.
3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

Problème **5 points**

Partie A - Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 ?

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3. Soit u une solution de (E') . Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).
   On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où u est une solution de (E').
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E) , déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Partie C

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$: déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe. Donner le tableau de variation de f.

3. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm, on note C$'$ la représentation graphique de f.

a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C' au point Ω d'abscisse -1.

b. Tracer avec soin la courbe C$'$ et la tangente T dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b. Soit α un réel positif. Calculer en cm^2 l'aire notée $\mathcal{A}(\alpha)$ de la zone du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C$'$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.