Liban juin 1967
Baccalauréat mathématiques libanais [1]

EXERCICE 1

1er sujet

1. Lieu des points dont la différence des puissances à deux cercles donnés est constante. (On établira la formule donnant la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles donnés.)
2. Établir les formules qui permettent de transformer en produit la somme de deux sinus et la somme de deux cosinus.

2e sujet

1. Mener à une hyperbole une tangente parallèle à une direction donnée. Discuter.
2. Construire, en géométrie descriptive, une droite passant par un point donné, parallèle à un plan donné, défini par ses traces, et rencontrant une droite donnée.

3e sujet

1. Reste de la division d'un nombre entier par 9.
2. Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre m, l'équation

$$m\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 1 - m.$$

EXERCICE 2

Dans le plan des deux axes rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ on considère le cercle (C) de centre C(+1 ; 0) et tangent à Oy et le cercle (C$'$) de centre C$'$(0 ; +1) et tangent à Ox. Soit A un point variable sur (C) et B le point défini par

$$\text{OA} = \text{OB} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

1. Montrer que le lieu de B est le cercle (C$'$). Quel est le lieu, (C$''$), du milieu, D, de AB ?
2. m désignant le coefficient angulaire de OA, calculer en fonction de m les coordonnées de A et la quantité $z = \text{AB}^2$.

   Étudier, lorsque m varie, les variations de la fonction

$$z = \frac{8}{1+m^2}$$

   et construire sa courbe représentative dans un système d'axes rectangulaires.

   Utiliser le graphique précédent pour discuter le nombre de positions de A sur (C) pour lesquelles AB a une longueur donnée, ℓ.
3. Soit A$'$ et B$'$ les inverses de A et B dans l'inversion (O, +4).

   Montrer que l'enveloppe de A$'$B$'$ est une parabole admettant le point O comme foyer.

1. Le programme de ce baccalauréat et la nature des épreuves ne sont pas nécessairement les mêmes que cpux du baccalauréat français.

4. On suppose que A est animé d'un mouvement uniforme sur (C). Montrer que B et D décrivent aussi (C$'$) et (C$''$) d'un mouvement uniforme et que les vitesses respectives, u, v et r, de A, B et D vérifient la relation

$$u^2 + v^2 = 4r^2.$$

5. Dans la relation $u^2+v^2 = 4r^2$ on suppose que u, v et r représentent des nombres entiers positifs et que v est égal au double d'un nombre premier donné, p.
Montrer que u est égal à un nombre pair, $2u'$, et calculer u' et r en fonction de p.

N. B. - Les quatre dernières parties du problème sont indépendantes.