Baccalauréat Liban octobre 1960
Série mathématiques

I. Exercice 1

Inverse d'un plan par rapport à un point situé hors de ce plan.
Projection stéréographique.

I. Exercice 2

Progressions géométriques. Somme de n premiers termes.
Application : Calculer les valeurs approchées par défaut et par excès à $\dfrac{1}{100}$ près de la somme des 20 premiers termes de la progression géométrique de premier terme $a = 1$ et de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

I. Exercice 3

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2+4x+7}{x^2+x-2}$$

et tracer la courbe représentative.

II.

Deux demi-droites $\mathrm{O}x_1$ et $\mathrm{O}x_2$ pivotent autour d'un point fixe O de manière que l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x_1},\ \overrightarrow{\mathrm{O}x_2}\right)$ garde une valeur constante α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
On désigne par $\mathrm{O}u$ la bissectrice intérieure de l'angle x_1Ox_2, par D_1 la droite portant $\mathrm{O}x_1$ et par D_2 la droite portant $\mathrm{O}x_2$.
On donne, d'autre part, un point fixe F distinct de O et l'on pose $\mathrm{OF} = a$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}u}\right) = \theta,\ (0 \leqslant \alpha < 2\pi)$.

1. On désigne par H_1 la projection orthogonale de F sur D_1 et par H_2 la projection orthogonale de F sur D_2 ; la perpendiculaire en H_1 à D_1 est orientée dans le même sens que la demi-droite $\mathrm{O}z_1$ définie par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x_1},\ \overrightarrow{\mathrm{O}z_1}\right) = +\frac{\pi}{2};$$

   la perpendiculaire en H_2 à D_2 est orientée dans le même sens que la demi-droite $\mathrm{O}z_2$, définie par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x_2},\ \overrightarrow{\mathrm{O}z_2}\right) = +\frac{\pi}{2};$$

   a. Calculer en fonction de $a,\ \alpha,\ \theta$ les quantités

$$x = \overline{\mathrm{FH}_1} + \overline{\mathrm{FH}_2} \quad \text{et} \quad y = \overline{\mathrm{FH}_2} - \overline{\mathrm{FH}_1}.$$

   Établir entre x et $y$une relation indépendante de θ.

   b. Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires, $x'\omega x,\ y'\omega y$, on marque le point m ayant pour coordonnées les nombres $x,\ y$ précédemment calculés.
   Déterminer le lieu de m quand θ varie de 0 à 2π.

2. On désigne par φ_1 le symétrique de F par rapport à D_1 par φ_2 le symétrique de F par rapport à D_2 et par $\mathrm{O}v$ la bissectrice intérieure de l'angle $\varphi_1 O \varphi_2$.

a. Évaluer en fonction de α et θ les angles $\left(\overrightarrow{\text{O}u},\ \overrightarrow{\text{O}v}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}\varphi_1},\ \overrightarrow{\text{O}\varphi_2}\right)$.

b. Calculer de deux manières la longueur $\varphi_1\varphi_2$:
— au moyen de a et α, en considérant le triangle $\varphi_1\text{O}\varphi_2$.
— au moyen de $x,\ y,\ \alpha$, en considérant le triangle $\varphi_1\text{F}\varphi_2$.
Retrouver ainsi la relation liant x et y.

3. **a.** Montrer que, pour chaque position de l'angle $x_1\text{O}x_2$, il existe en général une parabole (P), de foyer F, tangente aux deux droites D_1 et D_2 et déterminer les points de contact respectifs de (P) avec les droites D_1, D_2. Cas exceptionnels.

b. Déterminer la directrice (Δ) de (P) et l'enveloppe de cette droite quand θ varie de 0 à 2π.

c. Calculer en fonction de $\theta,\ \alpha$ et a le paramètre p de la parabole (P).

Vérifier que la quantité $\dfrac{\overline{\text{FH}_1}.\overline{\text{FH}_2}}{p}$ reste constante quand θ varie.

d. Montrer que, par un point quelconque M du plan, il passe, au plus, quatre paraboles (P).
[La discussion du nombre exact de paraboles (P) passant par M n'est pas demandée.]