Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille juin 1970

EXERCICE 1

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(1-\text{i})x^2-2x-(11+3\text{i})=0.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction

$$x \longmapsto y=\frac{1+\text{Log}x}{x},$$

où la notation Log x désigne le logarithme népérien de x.
Étudier ses variations et construire avec précision sa représentation graphique (C) (le repère d'axes $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$ sera choisi orthonormé, l'unité mesurant 4cm.
On déterminera, en particulier, les points suivants de (C) :
M_1 d'abscisse Xl' intersection de (C) et de l'axe $x'x$,
M_2 d'abscisse x_2, point en lequel la tangente passe par l'origine,
M_3, d'abscisse x_3, point en lequel la tangente est parallèle à $x'x$,
M_4 d'abscisse x_4, point en lequel la dérivée seconde s'annule.
Vérifier que les quatre nombres x_1, x_2, x_3 et x_4 constituent une progression géométrique.

EXERCICE 3

On considère un triangle MAB et, H désignant le pied sur AB de la hauteur issue de M, on appelle P et Q les pieds des perpendiculaires menées de H sur les droites MA et ME.

Partie A

1. Démontrer que les quatre points A, B, P et Q sont situés sur un même cercle, $(C)'$ et que le point M a même puissance par rapport au cercle (C) et au cercle de centre O, milieu de AB, passant par H.

   Déterminer l'axe radical de ces deux cercles.
2. La lettre C désignant le centre du cercle (C), établir la relation

$$(1)\quad \overline{\text{HA}}\cdot\overline{\text{HB}}=2\overline{\text{OC}}\cdot\overline{\text{HM}}.$$

Partie B

La figure précédente est étudiée dans un repère orthonormé associé aux axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$, l'axe $y'y$ contenant les points A et B, dont les coordonnées sont ainsi A$(O\ ;\ a)$ et B$(0\ ;\ -a)$, a désignant un nombre positif donné.
On désigne par $\left(x_0, y_0\right)$ les coordonnées de M$(x_0\neq 0)$.

1. En utilisant la relation (1), écrire l'équation du cercle (C), puis l'équation du cercle de diamètre HM ; en déduire que l'équation de la droite PQ est

$$\left(x_0^2-y_0^2+a^2\right)x+2x_0y_0y-x_0\left(y_0^2+a^2\right)=0.$$

   (On pourra utiliser le fait que PQ est axe radical de ces deux cercles.)

2. En déduire l'ensemble des points M pour lesquels la droite PQ est parallèle à l'axe $x'x$.

3. On donne le point K$\left(\dfrac{a}{2}\,;\,0\right)$ et l'on impose à la droite PQ de passer par ce point K.

a. Écrire l'équation de la courbe (E), ensemble des points M correspondants.

b. Étudier les variations et la représentation graphique de la fonction f

$$x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x) = \sqrt{a}\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}}$$

c. En déduire la construction de la courbe (E).

d. On propose de calculer l'intégrale

$$\int_{\ell}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où ℓ est un nombre donné tel que $-\dfrac{a}{2} < \ell < a$.

On montrera pour cela qu'il existe deux nombres constants, α et β tels que

$$\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}} = \alpha\sqrt{2x+a} + \frac{\beta}{\sqrt{2x+a}}$$

En déduire que l'aire du domaine compris entre la courbe (E), l'asymptote de cette courbe et son point double $(x = a)$ a une valeur finie, que l'on calculera.

1. $_{O}nconsid\grave{e}relafonctionfmd\acute{e}finiepourxr\acute{e}elparfm(x) = eX-mx, m\acute{e}tantunparam\grave{e}trer\acute{e}elpositif.S$
le graphique de f_m par rapport à un repère orthonormé. a) Étudier les variations de la fonction fm ; montrer que, quel que soit m, la courbe (Cm) admet une asymptote, dont on déterminera l'équation. Déterminer les coordonnées du point M correspondant au minimum de la fonction fm' b) Trouver, quand m varie, l'équation de l'ensemble (Γ) des points M et construire l'ensemble (Γ).
Il. $_{O}ndonnelesnombresr\acute{e}els6etcptelsque$
et 1t 2 < cp < 1t. On considère les nombres complexes Zl = cos 26 + i sin 26 et Z2 = cos 2cp + i sin 2cp. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes (1- Zl) et (1 + Z2) ; en déduire le module et l'argument du nombre complexe 1-
z1 z=–· 1 + Z2 Ill. $_{S}oitunrep\grave{e}reorthonorm\acute{e}d'axesOx, Oyetaunnombrer\acute{e}eldonn\acute{e}strictementpositif.Onc$
$par(D)et(D')lesparall\grave{e}les\grave{a}Oymen\acute{e}esrespectivementparlespointsA(2a,0)etA'(a,0).A.B.2,19702f$