Baccalauréat C Lille juin 1973

EXERCICE 1

1. $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W}$ désignant deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel euclidien E_3 de dimension 3, on demande de vérifier la relation

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}\right) \wedge \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}\right)\overrightarrow{W} - \left\|\overrightarrow{W}\right\|^2 \overrightarrow{U} \qquad (1)$$

   On pourra pour cela supposer qu'une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de E_3 est choisie de façon que, dans cette base, $\overrightarrow{U}$ ait pour coordonnées $(a\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{W}\,(b\,;\,c\,;\,0)$.

2. On suppose que $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont deux vecteurs données et orthogonaux de E_3.
   a. Démontrer en utilisant la relation (1) qu'il existe un seul vecteur $\overrightarrow{U_0}$ orthogonal à $\overrightarrow{W}$ tel que $\overrightarrow{U_0} \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$.
   b. En déduire que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{U}$ tels que : $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}$, est défini par $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_0} + \lambda\overrightarrow{W}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence de solutions pour le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^x \times e^{2y} & = & a \\ 2xy & = & 1 \end{array}\right. \qquad (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$$

Résoudre complètement dans le cas $a = \sqrt{e^5}$.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère cartésien orthonormé $\mathcal{B}\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On note α et β deux paramètres réels, et f toute application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout $M(x\,;\,y)$ donne pour image le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ déterminé par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha x + \beta y \\ y' & = & -2\beta x + (\alpha + 2\beta) y \end{array}\right.$$

La matrice de l'application linéaire associée à f est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices A, lorsque α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Étude de l'application f_1 correspondant à $\alpha = -1$ et $\beta = +1$.

1. Écrire les équations de f_1, et sa matrice A_1. Démontrer que f_1 est bijective et que 0 est le seul point invariant. Écrire les équations définissant dans $\mathcal{B}$ l'application réciproque. Quelle est l'image par f_1, des droites ayant pour équations $x - y = 0$ et $x = 0$?

2. Reconnaître l'application $f_1 = f_1 \circ f_1$, et écrire sa matrice.
Que peut-on dire des applications $f_1^3 = f_1 \circ f_1 \circ f_1$ et $f_1^4 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1$?
Le point M ayant respectivement pour images M_1, M_2, M_3 et M_4 dans f_1, f_1^2, f_1^3 et f_1^4, quelle particularité présente l'ensemble de ces points ? (on ne cherchera pas la relation géométrique entre M et M_1).

3. a, b, c étant trois réels donnés quelconques, on appelle E l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ défini dans le repère $\mathscr{B}$ par l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

a. Écrire l'équation de l'ensemble $f_1(\text{E})$, image de E par l'application f_1.

b. Montrer que, si a, b, c peuvent être choisis tels que l'image $f_1(\text{E})$ ait pour équation

$$\lambda\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right) = 1$$

λ est nécessairement égal à l'une ou l'autre de deux valeurs que l'on déterminera.

c. À $\lambda = 1$ correspond une famille de courbes E dont l'équation dépend d'un seul paramètre. On appelle E$'$ celle de ces courbes pour laquelle a est égal à 2. Montrer qu'elle est la réunion de deux courbes E'_1 et E'_2 admettant respectivement pour équations relativement à $\mathscr{B}$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} y & = & g_1(x) & = & x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour } \text{E}'_1 \\ y & = & g_2(x) & = & x - \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour } \text{E}'_2 \end{array}\right.$$

Étudier les variations des fonctions g_1, et g_2 et construire E$'$. Quelle est l'image $f_1\left(\text{E}'\right)$?
Si M est un point quelconque de E$'$, que peut-on dire de ses images successives M_1, M_2, M_3, M_4 ?

d. À $\lambda = -1$ correspond une famille de courbes E dont l'équation dépend de deux paramètres. On appelle E$''$ celle de ces courbes qui est associée aux valeurs $b = 1$ et $c = 0$. Montrer que E$''$ admet pour équation relativement à $\mathscr{B}$, $y = x + \dfrac{1}{2x}$: construire E$''$ et son image $f_1\left(\text{E}''\right)$.
Si M est un point quelconque de E$''$, que peut-on dire de ses images M_1, M_2, M_3 et M_4 ?

Partie B

1. A et A' désignant deux matrices quelconques de $\mathscr{A}$, et correspondant aux couples $(\alpha\,;\,\beta)$ et $\left(\alpha'\,;\,\beta'\right)$, démontrer que :
la matrice somme $A + A'$ et la matrice produit $A \times A'$ sont des éléments de $\mathscr{A}$.

2. On appelle φ l'application de $\mathscr{A}$ dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes définie par

$$\varphi(A) = (\alpha + \beta) + \text{i}\beta.$$

a. Démontrer que φ est un isomorphisme de l'ensemble $\mathscr{A}$ muni des lois + et × sur le corps $\mathbb{C}$.

b. En utilisant l'isomorphisme précédent, déterminer les matrices A solutions de $A^4 = \text{I}$, I désignant la matrice de $\mathscr{A}$ correspondant à $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.