Baccalauréat C Lille juin 1980

EXERCICE 1 **4 POINTS**

P est un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ admet pour affixe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
On considère l'application f du plan P dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ dont l'affixe z' est définie par :

$$z? = (1?i?3)12z?1.$$

($z = x - \mathrm{i}y$ est le nombre complexe conjugué du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$).

1. Quelle est la nature de l'application f ?
2. Déterminer l'application $f \circ f$; en déduire l'application réciproque f^{-1} de f.
3. Quelle est la décomposition canonique de f ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On considère trois réels a, b, c. Un sac contient 3 jetons marqués respectivement a, b, c. On tire au hasard un jeton, on le remet dans le sac, et on tire à nouveau un jeton. Les tirages sont supposés équiprobables. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque couple de tirages ainsi décrits, associe le produit des nombres marqués sur les deux jetons tirés.

1. Montrer que l'espérance mathématique de X (notée E(X)) est égale à 1 9 (a + b + c)2. Calculer l'espérance mathématique de X2 (notée E(X2)).
2. **a.** Démontrer que si a, b, c (dans cet ordre) sont trois termes d'une suite géométrique alors $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$.

   b. Déterminer les triplets a, b, c pour lesquels a, b, c sont dans cet ordre trois termes positifs d'une suite géométrique avec $\mathrm{E}(X) = 49$ et $\mathrm{E}\left(X^2\right) = 8\,281$.

PROBLÈME **13 POINTS**

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note P le plan vectoriel euclidien associé.

Partie A

À chaque réel a, on associe la fonction numérique de la variable réelle x 1. : x 1-+ 1. (x) = a(1 - x) + Log x. (log x est le logarithme népérien de x).

1. Établir le tableau de variation de la fonction 1.. (On distinguera les cas a   0 et a > 0). A quelle conditionf. est-elle une bijection de IR sur IR ?
2. On appelle (C.) la courbe représentative de 1. dans le repère (0, i, j). Montrer que les courbes (C.) ont un point commun, A, que l'on déterminera.
3. Étudier fi et tracer sa courbe représentative (Cd dans le repère orthonormé (0, i, j), d'axes x'Ox, y'Oy. (Unité : 2 cm). On étudiera les branches infmies de (Cl)'
4. Calculer, en fonction de a et À, l'intégrale I.(À) = r 1. (x) dx, où
   Montrer que I.(À) admet, lorsque À tend vers 0, une limite indépendante de a.

Partie B

Dans l'espace vectoriel euclidien P, on considère l'endomorphisme σ_a dont la matrice dans la base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout a, σ_a est bijectif. Déterminer la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de l'endomorphisme réciproque $(\sigma_a)^{-1}$.
2. Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère l'application affine s_a, d'endomorphisme associé σ_a, transformant l'origine du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en le point O$'$ de coordonnées $(-1~;~+1)$.

   Étant donné un point quelconque M de $\mathcal{P}$, soit M' son image par s_a. Donner les expressions des coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.
3. **a.** Si l'on note $z' = x' + \text{i}y'$ l'affixe de M' et $z = x + \text{i}y$, celle de M, montrer que z' et z sont liées par une relation de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z, et α et β, des nombres complexes que l'on explicitera.

   b. Quelle est la nature de s_a ? En donner les éléments caractéristiques : axe, rapport, et centre éventuel. (On examinera séparément le cas $a = 0$).

   c. Quelle est la nature de la composée $s_a \circ s_a$. ? En donner les éléments caractéristiques.

Partie C

On note (Γ_a) l'image de (C_a) par s_a.

1. Montrer que (Γ_a) est la courbe représentative, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de la fonction g_a :

$$g_a : x \longmapsto -ax - a + 1 + \left(1 + a^2\right)\text{e}^{x+1-a}.$$

2. Étudier la fonction

$$g_1 : x \longmapsto -x + 2\text{e}^x.$$

   et construire la courbe (Γ_1) dans le même repère que (C_1).