Baccalauréat C Lille septembre 1970

EXERCICE 1

Dans l'ensemble des complexes, résoudre l'équation

$$Z^2-\left(5+4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)Z+9=0.$$

Calculer le module et l'argument de chacune de ses racines Z' et Z'', puis le rapport $\dfrac{Z'}{Z''}$. (On appellera Z' la racine ayant le plus grand module.)

EXERCICE 2

On considère, dans un plan rapporté à un repère quelconque $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'ensemble des transformations ponctuelles $T(a,\ b)$:

– à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, $T(a,\ b)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& ax-by,\\ y' &=& bx+ay,\end{array}\right.$$

les paramètres réels a et b étant liés par la condition $a^2+b^2=1$.

1. Montrer que $T(a,\ b)$ est toujours bijective.
2. Montrer que, pour la loi de composition notée 0, l'ensemble de ces transformations constitue un groupe commutatif.
   On rappelle que, si $T(a,\ b)$ transforme M en M' et si $T(a',\ b')$ transforme M' en M'', alors
   $$T(a',\ b')\circ T(a,\ b)$$
   transforme M en M''.
   On précisera les paramètres caractéristiques de la transformation neutre et de la transformation symétrique de $T(a,\ b)$.

EXERCICE 3

On considère l'application f définie par

$$z\xrightarrow{f}z_1=\frac{z+1}{z-1}$$

Les ensembles d'où sont extraits z et z_1 seront précisés au début de chaque question.

1. *z et z_1 étant des entiers relatifs*, résoudre l'équation
   $$z_1=1+\frac{2}{z-1}$$
   Il s'agit donc de trouver les couples $(z,\ z_1)$ solutions de cette équation.
2. *z et z_1 sont extraits du corps des nombres réels.*
   Construire la représentation graphique (H) de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}z,\ \mathrm{O}z_1)$. La coordonnée z sera appelée abscisse.

a. Calculer l'aire limitée par la courbe (H), l'axe Oz et les droites d'équations $Z = 2$ et $Z = \mathrm{e}$.

b. Tracer la droite (D) d'équation $z_1 = -z$.

Soit P_1 le point de (H) d'abscisse $a_1 \neq 1$. Par P_1 on mène la parallèle à l'axe des z, qui coupe (D) en P'_1. Par P'_1 on trace la parallèle à l'axe Oz_1 qui coupe (H), en P_2.

On recommence ensuite, à partir de P_2, la construction faite à partir de P'_1. On obtient ainsi P_3. On continue de la sorte par le même procédé et l'on obtient, sur (H), une suite de points $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$, dont les abscisses, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, constituent une suite de nombres réels.

Calculer a_3, puis a_5 ? Quelle remarque peut-on faire sur la suite (a_n) ?

Calculer alors le terme de cette suite dont l'indice est 3^{43}.

c. On pose $a_1 = \mathrm{tg}\,\alpha$. Trouver une expression simple de a_2, puis de a_3, de a_4 et de a_5 ? Retrouver la remarque faite au paragraphe b de la question 2.

3. *Désormais z et z_1 sont des nombres complexes ($z \neq 1$).*

On utilisera les notations suivantes :

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{et} \quad z_1 = X + \mathrm{i}Y.$$

Dans le plan complexe

m est l'image de z,
M est l'image de z_1,
A est l'image de -1,
B est l'image de $+1$.

T désigne la transformation qui, à m, fait correspondre M :

$$m \xrightarrow{T} M.$$

a. Établir que T est involutive. Quel est le lieu de m pour que $|z_1| = \sqrt{2}$. (Les barres verticales désignent le module de z_1)

b. Quel est le lieu de m pour que

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi?$$

c. Calculer X et Y en fonction de x et de y.

Déterminer ensuite x et y en fonction de X et Y. Quel est le lieu de M lorsque m décrit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$?

Trouver le lieu de M lorsque m décrit la droite d'équation $y = 2$.

d. Donner $z_1 - 1$ en fonction de z.

Montrer que T est le produit commutatif d'une inversion et d'une symétrie que l'on précisera. Retrouver alors les résultats de la question cl.

N. B.- Le candidat peut aborder la question 2 sans avoir traité la question 1 ; il peut égaiement commencer par la question 3, qui est indépendante de ce qui précède. Enfin, les subdivisions de la question 3 sont, dans une large mesure, indépendantes.