

♣ Baccalauréat C Lille juin 1971 ♣

Le candidat doit traiter les DEUX EXERCICES et le PROBLÈME

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité de longueur étant prise égale à 2 centimètres.
2. Calculer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \lambda + 1$ ($\lambda > 1$).
Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers plus l'infini?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit un triangle ABC de côtés $AB = 4a$, $AC = 5a$, $BC = 7a$ (a longueur donnée).

1. M étant un point quelconque de l'espace, donner une expression plus simple du vecteur $\vec{v}_1 = 7\vec{MA} + 5\vec{MB} + 4\vec{MC}$, en utilisant la notion de barycentre.
2. Que peut-on dire du vecteur $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ quand le point M varie?
Soit \vec{v}_2 ce vecteur.
3. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 aient le même module.

PROBLÈME

12 POINTS

1. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'axes \vec{Ox} , \vec{Oy} on considère les cercles (C_1) et (C_2) d'équations respectives

$$(C_1) \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$(C_2) \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y\sqrt{3}$$

Préciser leurs centres et leurs rayons.

Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2) ?

2. À tout point M de coordonnées x, y par rapport au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, est associé son affixe $z = x + iy$.

Soit M un point du cercle (C_1) , z son affixe.

On considère la similitude directe (S_O) de centre O , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Quel est le transformé du cercle (C_1) dans cette similitude?

On désigne par z' l'affixe de M' homologue de M dans cette similitude. Exprimer z' en fonction de z .

A étant le point (autre que O) commun aux cercles (C_1) et (C_2) , montrer que les points M, M' et A sont alignés.

3. Calculer en fonction de z l'affixe ω du point Ω du plan, tel que le triangle $\Omega M' M$ soit rectangle isocèle et tel que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = -\frac{\pi}{2}$.

Quel est l'ensemble (Γ) des points Ω quand M décrit le cercle (C_1) ?

Calculer les coordonnées de Ω en fonction de celles de M et trouver l'équation de (Γ) .

4. M étant supposé fixe sur (C_1) , Ω désignant le point qui lui a été associé dans 3., soit (R) la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit P un point quelconque du plan, P' son transformé par (S_O) , P'' le transformé de P' par (R) .

p, p', p'' désignent les affixes des points P, P' et P'' . Exprimer p' en fonction de p ; p'' en fonction de p' et ω , enfin $p'' - z$ en fonction de $p - z$.

En déduire que la composée $(R) \circ (S_O)$ de (S_O) par R est une homothétie de centre M . Retrouver géométriquement ce résultat.