Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille juin 1972

EXERCICE 1

On notera 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2+2x-3=0.$$

2. Trouver les diviseurs de zéro dans l'anneau Z/21Z. 30 Résoudre, dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2+2x-3=0.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f, d'une variable réelle, définie par

$$f(x)=2x-x\text{Log}\,x$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Déterminer les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
Étudier les variations de la fonction f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; l'unité de longueur étant le segment dont la mesure, en centimètres, est $\dfrac{1}{2}$.
Déterminer les coordonnées du point P, intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

2. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire, $\mathscr{A}(\lambda)$, du domaine plan défini par

$$\lambda\leqslant y\leqslant \text{e}^2,\quad \text{et}\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)$$

et λ satisfaisant à la condition $0<\lambda<\text{e}^2$.
Déterminer la limite, $\mathscr{A}$, de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
On donnera une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en centimètres carrés avec la précision que permet la donnée de e, à 2.10^{-4} près, $\text{e}\approx 2,718$.

PROBLÈME

Partie A

Soit (P) le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On désigne par l'application de (P) dans (P) qui, au point M de coordonnées x et y, associe le point M' de coordonnées x' et y' définies par les relations

$$x'=2x+3y\quad \text{et}\quad y'=x+2y.$$

On note $M'=f(M)$.

1. Quel est l'ensemble des points invariants de l'application f ?
Montrer que f est une application affine de (P) dans (P) et qu'elle est bijective.
Quelle est l'image d'une droite par f ?
Quelle est l'image d'une paire de droites parallèles ?
2. **a.** On se propose de chercher s'il existe des points, M dont les transformés, M', par f satisfont à une relation de la forme

$$(1) \qquad \overrightarrow{\text{O}M'} = k\overrightarrow{\text{O}M},$$

k étant une constante donnée non nulle.
Montrer qu'il existe, pour la constante k, deux valeurs possibles, et deux seulement, k_1 et k_2, si l'on impose à $\overrightarrow{\text{O}M}$ d'être non nul.
Déterminer, pour chacune de ces deux valeurs, les ensembles (D) et (D') des points M satisfaisant à (1).
Mon!rer que (D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{I} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\jmath}$ et que (D') a pour vecteur directeur $\overrightarrow{J} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\jmath}$.
Quelles sont les restrictions de f respectivement à (D) et à (D') ?
b. Le plan (P) étant rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, les coordonnées d'un point quelconque, M, sont désignées par X et par Y, celles de $M' = f(M)$ par X' et par Y' ; montrer que l'on a

$$X' = \left(2-\sqrt{3}\right)X \quad \text{et} \quad Y' = \left(2+\sqrt{3}\right)Y.$$

3. On suppose M non situé sur (D) ou sur (D').
a. Montrer que M et M' appartiennent à une hyperbole, (H), asymptote aux droites (D) et (D').
b. Soit (H) l'hyperbole d'équation $XY = h$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que l'équation de la droite, (Δ), tangente à (H) au point $M_0\,(X_0~;~Y_0)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{X}{2X_0} + \frac{Y}{2Y_0} - 1 = 0.$$

En déduire que la droite $\left(\Delta'\right)$, image de (Δ) par f, esL tangente à (H) au point $M_0' = f\,(M_0)$.
4. Soit (L) une droite qui coupe (D) et (D') respectivement en A et en B. On note $\text{A}' = f(\text{A})$ et $\text{B}' = f(\text{B})$. Montrer que, s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = \lambda\overrightarrow{\text{AB}}$, alors $\overrightarrow{\text{A}'M'} = \lambda\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$.
La droite (L) étant donnée, montrer qu'il existe une similitude, g, telle que, quel que soit $M \in (L)$, on a $M' = g(M)$.

Partie B

On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Les formules de récurrence,

$$u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n,$$

définissent deux suites illimitées d'entiers naturels $(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots)$ et
$(v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots)$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 - 3v_n^2 = 1$.

2. Établir les formules de récurrence

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} + v_{n-1} = 4v_n.$$

3. On désigne par A_n le point de coordonnées $x = u_n$ et $y = v_n$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la partie A.

Montrer que les points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ appartiennent à une même conique. Préciser éventuellement les asymptotes.

Montrer que la droite $(\text{O}A_n)$ passe par le milieu du segment $[A_{n-1}A_{n+1}]$. En déduire une construction du point A_{n+1} à partir des points A_{n-1} et A_n.