Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C juin 1974 Lille ∾

EXERCICE 1

1. On donne deux entiers relatifs a et b et on considère l'équation $ax - by = 1$ où l'inconnue est le couple $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'ensemble des solutions de cette équation ne soit pas vide.

2. Vérifier que le couple (7 ; 24) est solution de l'équation

$$(E) \qquad 55x - 16y = 1$$

En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui sont solutions de (E).

EXERCICE 2

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{1}{x} - \text{Log}\,\frac{1+x}{x}$$

Donner l'ensemble de définition, étudier les variations de la fonction f (on pourra utiliser la limite de $x\text{Log}\,x$ quand x tend vers zéro), tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, d'un plan affine P. (On prendra 2 cm pour unité de longueur).

Pour le graphique, on utilisera les valeurs approchées suivantes :

$$\text{Log}\,2 \approx 0,69, \quad \text{Log}\,3 \approx 1,10, \quad \text{Log}\,5 \approx 1,61$$

2. On donne un réel $a > 1$.

Calculer l'aire $\mathscr{A}(\text{E})$ de l'ensemble E des points M du plan P dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Calculer la limite de $\mathscr{A}(\text{E})$ quand $a \to +\infty$.

$\left(\text{On pourra poser } a = \dfrac{1}{X}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$. On considère l'application $f_{a,\,b}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$, est :

$$M(a\,;\,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

dans laquelle a et b sont deux nombres réels.

1. Comment faut-il choisir a et b pour que l'application $f_{a,\, b}$ soit bijective ?
   Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le noyau de $f_{a,\, b}$ et l'image de $\mathscr{P}$ par $f_{a,\, b}$.
2. On désigne par $\mathscr{F}^\star$ l'ensemble des applications $f_{a,\, b}$ bijectives. On munit $\mathscr{F}^\star$ de la loi de composition des applications notée $\circ$.
   Démontrer que $\left(\mathscr{F}^\star,\ \circ\right)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Démontrer que, pour deux valeurs du nombre réel λ, distinctes ou confondues, il existe des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{P}$, distincts du vecteur nul, vérifiant

$$f_{a,\, b}\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}.$$

   Dans le cas où ces deux valeurs de λ sont confondues, reconnaître $f_{a,\, b}$.
   Dans le cas où ces deux valeurs de λ sont distinctes, déterminer pour chacune d'elles l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $f_{a,\, b}\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}$.
4. Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right)$, $\quad \overrightarrow{e_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Démontrer que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base orthonormée de $\mathscr{P}$. Quelle est la matrice de $f_{a,\, b}$ dans la base $\mathscr{B}'$?

Partie B

Soit P un plan affine associé à $\mathscr{P}$. On munit P du repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. Dans la suite du problème, les coordonnées seront toujours prises dans ce repère.
On considère l'application affine $g_{a,\, b}$ de P à laquelle est associée l'application $f_{a,\, b}$ et qui transforme le point O en le point O$'$ de coordonnées $x_0 = 2$, $y_0 = O$.

1. Exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point $N' = g_{a,\, b}(N)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point N.
2. Pour quelles valeurs de a et b, $g_{a,\, b}$ est-elle une isométrie affine ? Préciser, dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de cette isométrie.
3. Pour quelles valeurs de a et b, $g_{a,\, b}$ est-elle une homothétie ? Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.
4. Vérifier que, quels que soient a et b

$$f_{a,\, b} = f_{a,\, \frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2},\, b}$$

   En déduire que $g_{a,\, b}$ est le produit de trois applications affines que l'on précisera.
   Construire, à l'aide de cette remarque, le transformé N' (par $g_{a,\, b}$) d'un point N,lorsque $a = 2$ et $b = \dfrac{3}{2}$.