Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Lille

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien E, rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_1}\right)$, est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Soit T l'application de E dans E qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (2 + \text{i})\overline{z} + 1$$

$\overline{z}$ désignant le conjugué de z.

1. Reconnaître la nature de l'application T.
   Exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M.
   Démontrer que T admet un point invariant unique que l'on déterminera.
2. Déterminer les droites du plan globalement invariantes par T.

EXERCICE 2

On note $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$ les éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. Dresser la table de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les éléments x de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ solutions de l'équation 4x = 4
3. Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ appartenant à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, solutions du système (S)

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{2}\\ \dot{3}x + \dot{5}y = \dot{5}\end{array}\right.$$

PROBLÈME

Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On rappelle que F, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel est un espace vectoriel.
Soit f_1, f_2, f_3, f_4 les 4 éléments de F définis par :

$$\begin{array}{rclcrcl} f_1(x) &=& \text{e}^x\cos x & \qquad & f_3(x) &=& x\text{e}^x\cos x\\ f_2(x) &=& \text{e}^x\sin x & & f_4(x) &=& x\text{e}^x\sin x\end{array}$$

e est la base de la fonction logarithme népérien,

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^x(a\cos x + b\sin x + cx\cos x + dx\sin x)$$

où a, b, c, d décrivent $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F.
2. Démontrer que $\mathcal{B} = \left(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\right)$ est une base de E.
   (On pourra par exemple utiliser $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Démontrer que tout élément f de E possède une dérivée f' qui appartient aussi à E.
Exprimer les composantes $\left(a', b', c', d'\right)$ de f' dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des composantes (a, b, c, d) de f dans cette base.

4. Soit L l'application de E dans E qui, à tout élément f de E associe f', fonction dérivée de f.
— Démontrer que L est un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.
— Déterminer le noyau de l'endomorphisme L et démontrer que L est bijectif.
— Déduire de ce qui précède que tout élément f de E admet une primitive φ et une seule appartenant à E.

Exprimer les composantes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de φ dans la base $\mathscr{B}$, en fonction des composantes (a, b, c, d) de f dans cette base.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x (\cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x)\,\mathrm{d}x$$

Partie B

Soit E_1 l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x (a\cos x + b\sin x) \quad \text{où } (a\,;\, b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathscr{B}_1 = \left(f_1\,;\, f_2\right)$ est une base de E_1.

2. Soit t un réel donné.
À tout élément f de E_1 on associe la fonction f_t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_t(x) = f(x+t)$$

a. Démontrer que f_t est élément de E_1.
Exprimer les composantes $\left(a'\,;\, b'\right)$ de f_t dans la base $\mathscr{B}_1$ en fonction de t et des composantes $(a\,;\, b)$ de f dans cette base.

b. Soit φ l'application de E_1l dans E_1 qui, à tout élément f de E_1 associe f_t.
Démontrer que φ est un endomorphisme de E_1

c. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}_1$. L'endomorphisme φ est-il bijectif ?

N. B. : La partie B peut être abordée dès que les questions 1. et 2., de la partie A ont été traitées.