Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille juin 1976

EXERCICE 1

On considère l'application de l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ dans lui-même qui, à z, associe

$$f(z) = \mathrm{i}z^3 + (2\mathrm{i}-1)z^2 - (\mathrm{i}+4)z + 3(2\mathrm{i}-1)$$

1. Dans le cas où z est un réel, écrire $f(z)$ sous la forme $\alpha + \mathrm{i}\beta$ où α et β sont des réels exprimés en fonction de z.
   En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine réelle z_0 que l'on calculera.
2. Démontrer que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_0)\left(Az^2 + Bz + C\right)$$

   et résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2

Soit φ la fonction numérique à variable réelle définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi(x) & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0\\ \varphi(0) & = & 0\end{array}\right.$$

1. Démontrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de φ et construire la courbe représentative de φ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
4. Démontrer que φ est intégrable sur $[0~;~x]$, x étant un réel quelconque. (On ne demande pas de calculer l'intégrale de φ sur $[0~;~x]$.

PROBLÈME :

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{M}_2'$ l'ensemble des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix}\dfrac{a+b}{2} & \dfrac{a-b}{2}\\ \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{a+b}{2}\end{pmatrix} \quad \text{où } (a~;~b) \in \mathbb{R}^2.$$

et P le plan affine associé au plan vectoriel $\mathcal{P}$. On munit $\mathcal{P}$ de la base orthonormée directe $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},~\vec{\imath}\right)$, et P du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Démontrer que $\mathcal{M}_2'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$.

2. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Démontrer que $(U,\ V)$ est une base de $\mathcal{M}_2'$.
   - **b.** Calculer U^2, V^2, $U \cdot V$, $V \cdot U$.
3. Démontrer que la multiplication des matrices est une loi interne de $\mathcal{M}_2'$.

Partie B

Soit $f_{a,\ b}$ l'application de P dans P définie par les formules

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{a+b}{2}x + \dfrac{a-b}{2}y \\ y' & = & \dfrac{a-b}{2}x + \dfrac{a+b}{2}y \end{array}\right.$$

x et y désignent les coordonnées d'un point M et x', y' celles de $M' = f_{a,\ b}(M)$, a et b sont deux nombres réels. 2 Soit F la famille des applications $f_{a,\ b}$,quand $(a~;~b)$ parcourt $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que la composée de deux applications de F est une application de F ; calculer c et d lorsque $f_{c,\ d} = f_{a,\ b} \circ f_{a',\ b'}$.
2. Pour quelles valeurs de a et b, $f_{a,\ b}$ a-t-elle une réciproque ? Vérifier que celle-ci appartient alors à F.
3. n étant un entier strictement positif, calculer les nombres α_n et β_n définis par

$$f_{\alpha_n,\ \beta_n} = f_{\alpha_{n-1},\ \beta_{n-1}} \circ f_{a,\ b}$$

   et la donnée de α_0 et β_0.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan, tels que les points O, M et M' soient alignés.
5. En général, $f_{a,\ b}$ transforme une droite en une droite. Dans quels cas sont-elles parallèles ?

Partie C

On pose $g_b = f_{1,\ b}$.
Le point M_0 de coordonnées $\left(x_0,~;~y_0\right)$ a pour image par g_b, $M_1 = g_b\left(M_0\right)$ et on pose plus généralement $M_n = g_b\left(M_{n-1}\right)$ pour n entier strictement positif.

1. **a.** Montrer que pour $|b| < 1$, les coordonnées $(x~;~y)$ de M_n ont des limites finies, les calculer.

   b. On suppose toujours $|b| < 1$. On désigne par A le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$, et on considère le point P_n de coordonnées $(X_n~;~Y_n)$ défini par

$$\overrightarrow{\text{A}P_n} = \overrightarrow{\text{A}M_1} + \overrightarrow{\text{A}M_2} + \cdots + \overrightarrow{\text{A}M_n}$$

   Comment faut-il choisir le point M_0 pour que X_n et Y_n aient des limites finies ?
   Quelles sont ces limites ?
   À quel ensemble appartiennent, alors, les points M_1, M_1, $\cdots$, M_n ?
2. Dans cette question on considère $b = 3$.

   a. Déterminer, par une équation dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$la transformée (C') du cercle (C) de centre O et de rayon 1 par l'application g_3.

b. Soit la courbe (E) dont une équation par rapport au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ est :

$$5x^2+8xy+5y^2-9=0$$

On considère le repère $\left(\text{O},~\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J}\right)$ défini de la façon suivante :

- r est une rotation vectorielle de $\mathscr{P}$ dont une détermination de l'angle est α $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$
- $\overrightarrow{I} = r\left(\overrightarrow{\imath}\right)$ et $\overrightarrow{J} = r\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$

Déterminer α $(0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ pour que l'équation de (E) dans le nouveau repère soit de la forme :

$$AX^2+BY^2+C=0$$

En déduire la nature de (E) et en donner les éléments caractéristiques.