∽ Baccalauréat C Lille juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Résoudre l'équation : $3b - 8a = 0 \quad$ où $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$.
   En déduire l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui sont solutions de l'équation :
   $$(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad 3b - 8a = 1.$$
2. Un entier naturel non nul A, s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base cinq et $\overline{abc}$ dans le système de numération de base sept.
   Déterminer a, b, c et donner l'expression de A dans le système decimal.
   N. B. 0 représente l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z, associe

$$z' = f(z) = 2\mathrm{i}\overline{z} + 2 - \mathrm{i},$$

$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de z.
On désigne par F la transformation du plan complexe, qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point $M' = F(M)$, d'affixe $z' = f(z)$.

1. La transformation F admet-elle des points invariants ?
2. Déterminer la nature de F et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathscr{F}$, muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ tel que :

$$E = \left\{ f \in \mathscr{F}, \quad f'' - f' + \frac{1}{4} f = \overline{0} \right\}$$

f' désignant la fonction dérivée première de f, f'' la fonction dérivée seconde et $\overline{0}$ l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E, muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Démontrer que si f est élément de E, alors l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x/2} f(x)$$
   appartient à $\mathscr{F}$, et que sa fonction dérivée seconde coïncide avec $\overline{0}$.

b. Réciproquement, démontrer que si g est élément de $\mathscr{F}$ tel que sa fonction dérivée seconde coincide avec $\overline{0}$, alors il existe un élément f de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x/2} f(x)$$

c. En déduire que :

$$E = \left\{f \in \mathscr{F}, \exists (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x/2}\right\}.$$

On notera $f_{a,\,b}$ l'élément de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\,b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x/2}.$$

3. Démontrer que $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ est une base de E. On la note B. Qu'en déduit-on sur la dimension de E ?

Si $f_{a,\,b}$ est élément de E, donner ses coordonnées dans la base B.

4. Démontrer que si $f_{a,\,b}$ est élément de E, sa fonction dérivée première est élément de E.

5. On considère alors l'application φ de E dans E qui à tout élément $f_{a,\,b}$ de E associe $f'_{a,\,b}$.

a. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base B.

b. φ est-il un automorphisme de E ? Si oui, donner l'expression de $\varphi^{-1}\left(f_{a,\,b}\right)(x)$ pour $f_{a,\,b}$ élément de E et pour tout x réel.

Que représente $\varphi^{-1}\left(f_{a,\,b}\right)$ pour $f_{a,\,b}$?

6. On considère l'élément $f_{1,\,1}$ de E. Donner l'expression de $f_{1,\,1}(x)$ pour tout x réel, étudier le sens de variation de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D du plan tel que :

$$D = \{M(x\,;\,y), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant f_{1,\,1}(x)\},$$

a. en utilisant le 5.

b. par un calcul direct d'intégrale.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la suite (h_n) d'éléments de E telle que :

$$h_1 = f_{1,\,1} \quad \text{et} \quad 4h'_{n+1} = h_n.$$

où h'_{n+1} désigne la fonction dérivée de h_{n+1}.
On posera :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (U_n x + V_n)\,\mathrm{e}^{x/2}, \quad (U_n\,;\,V_n) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Exprimer U_{n+1} et V_{n+1} en fonction de U_n et V_n. En déduire qu'il existe un endomorphisme ψ de E tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad h_{n+1} = \psi(h_n)$$

Écrire la matrice A de ψ dans la base B.

2. Calculer A^2 et A^3.

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad A^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'expression de U_n et $_n$ en fonction de n, pour n élément de $\mathbb{N}^\star$.

Donner alors, pour tout élément $n \in \mathbb{N}^\star$, et tout x réel, l'expression de $h_n(x)$.