

Baccalauréat C Lille juin 1978

EXERCICE 1

3 POINTS

On désigne par \dot{a} la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a .

1. Déterminer les couples (\dot{a}, \dot{b}) tels que :

$$\dot{a} \cdot \dot{b} = \dot{0}, \quad \dot{a} \neq \dot{0} \text{ et } \dot{b} \neq \dot{0}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.
 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y &= \dot{3} \\ \dot{2}x + y &= \dot{5} \end{cases}$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit E un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 3, et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E . Pour tout réel θ , on appelle φ_θ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur \vec{u} de coordonnées $(x; y; z)$ associe le vecteur \vec{u}' de coordonnées $(x'; y'; z')$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x' &= x \cos^2 \theta - y \sin \theta - z \sin \theta \cos \theta \\ y' &= x \sin \theta \cos \theta + y \cos \theta - z \sin^2 \theta \\ z' &= x \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

1. Démontrer que φ_θ est une transformation orthogonale (ou isométrie vectorielle).
 2. On suppose dans cette question $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; montrer que φ_θ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe.

PROBLÈME

13 POINTS

On désigne par \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On note \bar{z} le complexe conjugué de z .

On considère le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Au point M de coordonnées $(x; y)$ on fait correspondre le complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M .

Partie A

1. Soit $F_{a, b}$ l'application de P vers P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' dont l'affixe z' est définie par $z' = a\bar{z} + ib$, $(a; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
 Établir les formules qui expriment les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M .
- a. Suivant les valeurs de a et b , rechercher les points invariants de $F_{a, b}$.
 b. Si $|a| \neq 1$, établir que $F_{a, b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{b}{a+1}$ par une homothétie dont on cherchera le centre et le rapport.
2. Soit $G_{c, d}$ l'application de P vers P qui au point N d'affixe z fait correspondre le point N' dont l'affixe z' est définie par $z' = cz + id$, $(c; d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
 Déterminer, suivant les valeurs de c et d , la nature de $G_{c, d}$.

Partie B

1. Dans cette question on considère $|a| \neq 1$ et le point M_1 d'affixe $u = a + ib$.
On pose $M_2 = F_{a,b}(M_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif

$$M_{n+1} = F_{a,b}(M_n)$$

- a. Montrer que M_n a pour affixe $u_n = a^n + ib \frac{1 - (-a)^n}{1 + a}$.
- b. Montrer que les points M_n , $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à la réunion de deux droites dont l'une D_1 passe par $A\left(0; \frac{b}{1+a}\right)$ et M_1 alors que l'autre D_2 est la transformée de D_1 par $F_{a,b}$.
2. Dans cette question, on considère $c \neq 1$ et le point N_1 d'affixe $v_1 = c + id$. On pose $N_2 = G_{c,d}(N_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $N_{n+1} = G_{c,d}(N_n)$.
- a. Montrer que N_n a pour affixe :

$$v_n = c^n + id \times \frac{c^n - 1}{c - 1}.$$

- b. Montrer que les points N_n , $n \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à une droite Δ passant par $B\left(0; \frac{d}{1-c}\right)$ et N_1 .
3. On considère les cas particuliers $c = -a$ et $d = b$ avec $|a| \neq 1$.
Montrer que $\Delta = D_2$.

Partie C

Soit Φ_1 la fonction numérique définie par 1

$$\Phi_1(x) = xe^{\frac{1}{x}} - 2.$$

1. Étudier les variations de $\Phi_1(x)$ et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}_1) dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en précisant le comportement de la courbe aux bornes des intervalles de définition. En particulier, montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (\mathcal{C}_1) .
2. On considère $c = 2, d = 1$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note Φ_{n+1} la fonction numérique dont la courbe représentative (\mathcal{C}_{n+1}) est l'image de la courbe (\mathcal{C}_n) par $G_{(2,1)}$, (\mathcal{C}_n) représentant la fonction Φ_n .
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi_n(x) = xe^{\frac{2^{n-1}}{x}} - 2^{n-1} - 1.$$

3. a. Montrer que pour tout n entier strictement positif, les courbes (\mathcal{C}_n) ont les mêmes asymptotes.
- b. Soit S_n le point de (\mathcal{C}_n) en lequel la tangente a la direction définie par \vec{i} , montrer que l'ensemble de ces points, lorsque n décrit \mathbb{N}^* , est inclus dans une droite passant par $B(0; -1)$.

Partie D

Soit h_1 la fonction numérique définie par :

$$h_1(x) = x - 1 + \frac{e-2}{x}.$$

1. Construire dans le plan P la courbe H_1 représentative de la fonction h_1 . On placera le point de coordonnées $(1 ; h_1(1))$. On prendra 0,85 pour valeur approchée de $\sqrt{e-2}$.
2. On considère la fonction numérique h_n définie par

$$h_n(x) = x - 1 + (4)^{n-1} \frac{e-2}{x}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit H_n la courbe représentative de h_n .

- a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_{n+1} est l'image de H_n par $G_{(2,1)}$.
- b. Calculer l'aire \mathcal{A}_n du sous-ensemble de P délimité par les courbes d'équation :

$$y = h_n(x), \quad y = x - 1, \quad x = 2^{n-1}, \quad x = 2^n.$$

Quel que soit n , $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre \mathcal{A}_n et \mathcal{A}_{n-1} .