

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3 points

On considère l'équation :

$$36x - 25y = 5 \quad (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

1. Montrer que pour toute solution  $(x; y)$ ,  $x$  est multiple de 5.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation. Puis la résoudre.
3. Soit  $d$  le plus grand commun diviseur de  $x$  et de  $y$  lorsque  $(x; y)$  est solution de l'équation.  
Quelles sont les valeurs possibles de  $d$ ?  
Quelles sont les solutions pour lesquelles  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux?

EXERCICE 2

4 points

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (-7 + 5i)z^2 + (29 - 16i)z - 3(17 - i) = 0$$

après avoir démontré qu'elle admet une racine réelle.

PROBLÈME

13 points

A

On considère les applications  $f_1, f_2, f_3$  de  $] -1; +1[$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\forall x \in ] -1; +1[ \quad f_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1+x} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Soit  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  engendré par le système  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

1. Démontrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathcal{F}$ .
2. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}$ , de coordonnées  $(a, b, c)$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$ .  
On appelle  $\bar{f}$  l'application de  $] -1; +1[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ] -1; +1[, \quad \bar{f}(x) = (1 - x^2) f'(x) - x f(x).$$

Calculer  $\bar{f}(x)$  en fonction de  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ .

En déduire que  $\bar{f}$  est élément de  $\mathcal{F}$ ,

3. On désigne par  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{F}$  qui à  $f$ , associe  $\bar{f}$ .
  - a. Déterminer  $\bar{f}_3 = \varphi(f_3)$  par ses coordonnées dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$
  - b. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $\varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi$ .  
Démontrer que les coordonnées de  $\varphi^n(f_3)$  sont :  $n$

$$(2n \cdot (-1)^{n+1}; 0; (-1)^n)$$

4. On considère l'ensemble des applications  $g_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $] -1 ; +1[$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$g_0 = \frac{f_3}{f_1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, g_n = \frac{\varphi^n(f_3)}{f_1}.$$

- a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -1 ; +1[, \quad g_n(x) = (-1)^n \left[ -2n + \ln \frac{1+x}{1-x} \right].$$

- b. Étudier suivant la parité de  $n$ , les variations de  $g_n$ . Préciser  $g_n(0)$  et  $g'_n(0)$ .
- c. On appelle  $(C_n)$  la courbe représentative de  $g_n$  dans un plan affine (P) muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$ , d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ .  
Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(C_{2n})$  est l'image de  $(C_0)$  par une translation  $T_{2n}$  de (P) dans (P) que l'on précisera et que  $(C_{2n+1})$  est l'image de  $(C_1)$  par une translation  $T_{2n+1}$  de (P) dans (P) que l'on précisera également.
- d. Tracer dans le plan (P) les courbes  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .  
En utilisant le 4. c, tracer  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  le point d'intersection  $\omega_n$  de  $(C_n)$  avec l'axe  $y'Oy$  est un centre de symétrie pour  $(C_n)$ . Tracer la tangente à  $(C_0)$  en  $\omega_0$  et à  $(C_1)$  en  $\omega_1$ .
- e. Déterminer les coordonnées  $x_0, y_0$  du point  $M_0$  de (P) commun à  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .  
Calculer l'aire du sous-ensemble de (P) délimité par  $(C_0)$ ,  $(C_1)$ , les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = x_0$ .

## B

Soit E un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension 3, muni d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux réels, on considère l'endomorphisme  $\Psi_{\alpha, \beta}$  de E défini par les équations :

$$\begin{cases} x' &= (\alpha - 1)x + 2\beta z \\ y' &= \alpha x + \beta y \\ z' &= -\beta z \end{cases}$$

- Si  $\vec{u}$  est un élément de E, calculer les coordonnées de  $(\Psi_{\alpha, \beta} \circ \Psi_{\alpha, \beta})(\vec{u})$ .
- Existe-t-il un couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $\Psi_{\alpha, \beta}$  soit une projection vectorielle?  
Dans l'affirmative, la caractériser.
- Existe-t-il un couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $\Psi_{\alpha, \beta}$  soit une symétrie vectorielle?  
Dans l'affirmative, la caractériser.
- Dans le cas particulier où E est l'espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de la partie A, montrer que pour un choix convenable de  $\mathcal{B}$ , il existe un couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $\Psi_{\alpha, \beta} = \varphi$ .