Baccalauréat C Lille juin 1980

I.

Soit un espace vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associé à E et rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit m un nombre réel. On considère l'application f_m de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M(x ; y ; z)$ associe le point $M'\left(x' ; y' ; z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -z+2 \\ y' & = & -x+1, \\ z' & = & y+m. \end{array}\right.$$

1. Montrer que f_m est un déplacement de $\mathscr{E}$.
2. **a.** Montrer que f_1 (où f_1 est l'application correspondant au cas $m = 1$) est une rotation et préciser son axe.
   b. Montrer que pour tout $m \neq 1$, f_m est un vissage et préciser son axe.

Remarque. - L'angle de f_m n'est pas demandé.

II.

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit (C) l'ensemble des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation

$$4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0.$$

1. Montrer que (C) est la réunion d'une partie d'une conique (C_1) et d'une partie d'une conique (C_2).
   Déterminer pour chacune des coniques (C_1) et (C_2) la nature, le centre, les sommets et, éventuellement, les asymptotes.
2. Montrer qu'en chacun des points où les courbes (C_1) et (C_2) coupent la droite $\left(\text{O}, \vec{\jmath}\right)$ elles ont même tangente.
3. Dessiner la courbe (C) en prenant pour unité le centimètre.

III.

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note P le plan vectoriel euclidien associé.

Partie A

À chaque réel a, on associe la fonction numérique de la variable réelle x

$$f_a : x \longmapsto f_a(x) = a(1-x) + \text{Log}\, x.$$

(Log x est le logarithme népérien de x).

1. Établir le tableau de variation de la fonction f_a. (On distinguera les cas $a \leqslant 0$ et $a > 0$).
   À quelle condition f_a est-elle une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$?
2. On appelle $(\mathscr{C}_a)$ la courbe représentative de f_a dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_a)$ ont un point commun, A, que l'on déterminera.

3. Étudier f_1 et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$. (Unité : 2 cm).
On étudiera les branches infinies de $(\mathscr{C}_1)$

4. Calculer, en fonction de a et λ, l'intégrale

$$I_a(\lambda) = \int_\lambda^2 f_a(x)\,\text{d}x, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Montrer que $I_a(\lambda)$ admet, lorsque λ tend vers 0, une limite indépendante de a.

Partie B

Dans l'espace vectoriel euclidien P, on considère l'endomorphisme σ_a dont la matrice dans la base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout a, σ_a est bijectif.
Déterminer la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de l'endomorphisme réciproque σ_a^{-1}.

2. Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère l'application affine s_a d'endomorphisme associé σ_a, transformant l'origine du repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en le point O′ de coordonnées $(-1\,;\,+1)$.
Étant donné un point quelconque M de $\mathscr{P}$, soit M' son image par σ_a.
Donner les expressions des coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.

3. **a.** Si l'on note $z' = x' + \text{i}y'$ l'affixe de M' et $z = x + \text{i}y$, celle de M, montrer que z' et z sont liées par une relation de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z, et α et β, des nombres complexes que l'on explicitera.

b. Quelle est la nature de σ_a ?
En donner les éléments caractéristiques : axe, rapport, et centre éventuel. (On examinera séparément le cas $a = 0$).

c. Quelle est la nature de la composée $\sigma_a \circ \sigma_a$?
En donner les éléments caractéristiques.

Partie C

On note (Γ_a) l'image de (C_a) par σ_a.

1. Montrer que (Γ_a) est la courbe représentative, dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de la fonction g_a :

$$g_a : \quad x \longmapsto -ax - a + 1 + \left(1 + a^2\right)\text{e}^{x+1-a}.$$

2. Étudier la fonction

$$g_1 : \quad x \longmapsto g_1(x) = -x + 2\text{e}^x$$

et construire la courbe (Γ_1) dans le même repère que (C_1)