ꕥ Baccalauréat C Lille juin 1981 ꕥ

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^\star$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}(3a+5b)(a+2b) & = & 1276\\ ab & = & 2m\end{array}\right.$$

où m désigne le plus petit multiple commun de a et b.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un plan affine euclidien orienté (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$. Le point M de coordonnées $(x~;~y)$ a pour affixe le nombre complexe $z = x+\text{i}y$.
On considère dans le plan (P) le triangle équilatéral OAB où B a pour affixe 1 et A a une ordonnée positive.

1. Soit D le milieu de AB et E le milieu de OB. Déterminer les affixes des points A, D et E. Placer sur une figure les points O, A, B, D, E dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$.
2. Combien y a-t-il d'applications affines du plan (P) transformant l'ensemble {O, A, B} en l'ensemble {E, D, B} ?
3. On considère l'application affine g caractérisée par

$$g(\text{A}) = \text{D},\quad g(\text{O}) = \text{B}\quad \text{et } g(\text{B}) = \text{E}.$$

Montrer que g est une similitude indirecte dont on donnera les éléments caractéristiques et la forme réduite (ou décomposition canonique).
(M étant un point d'affixe z, on pourra exprimer l'affixe z' de son image M', en fonction de z).

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

On appelle F l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lcl} f(x+y)f(x-y) & = & (f(x)f(y))^2\ \forall (x,~;~y) \in \mathbb{R}^2\\ f(0) & \geqslant & 0\end{array}\right.$$

1. Vérifier que la fonction $x \longmapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.
2. Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0,\quad y = 0,\quad x = y.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si f est l'application identiquement nulle notée $\tilde{0}$.

4. On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.

a. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{a}{2^n}.$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

b. Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$ (utiliser la question 2).

En déduire alors que $f(0) = 0$.

5. On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$.

Montrer que f ne s'annule jamais et que, pour tout x réel, $f(x) > 0$. Montrer que f est une fonction paire.

Partie B

Soit G l'ensemble des fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\exists f \in \mathrm{F} - \{\tilde{0}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \log[f(x)].$$

1. Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par f, que tout élément g de G vérifie la relation

$$(2) \quad \forall (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)].$$

2. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.

3. Montrer à l'aide de la relation (2) que

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(nx) = n^2 g(x).$$

Montrer que la relation (3) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(rx) = r^2 g(x).$$

(on pourra poser $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$).

On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Partie C

On admet dans toute la suite que les fonctions de F distinctes de $\tilde{0}$ sont les fonctions de la forme f_λ, où λ est un paramètre réel quelconque, définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de f_λ suivant les valeurs de λ. Pour quelles valeurs de λ la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ a-t-elle une asymptote ?

2. Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur $\mathscr{C}_\lambda$ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie ?