Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Lille

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(1) \qquad 9x - 22y = 55.$$

2. Déterminer les couples solutions de l'équation (1) tels que le plus grand commun diviseur de x et de y soit 55.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^4 - (10\text{i} - 5)z^2 - 14\text{i} - 48 = 0.$$

2. On appelle z_1, z_2, z_3, z_4 les solutions de cette équation en supposant que

$$\Re(z_4) < \Re(z_3) < 0 < \Re(z_2) < \Re(z_1)$$

où $\Re(z_i)$ représente la partie réelle de z_i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Soit M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives $2 + \text{i}$ et $1 + 3\text{i}$.
Déterminer les deux similitudes laissant le point O d'affixe 0 invariant et transformant M_1 en M_2. On précisera les éléments caractéristiques de ces similitudes.

PROBLÈME **12 points**

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un scalaire.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f: \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{e}^x(a + b\sin x + c\cos x) \end{array}$$

où a, b et c sont trois réels quelconques.

Partie A

On appelle g l'élément de $\mathscr{E}$ correspondant au cas où $a = 0,\ b = c = 1$.

1. Étudier les variations de g, démontrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J, que l'on déterminera.
Si l'on appelle g l'application telle que

$$\tilde{g}: \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \to & \text{J} \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

étudier la dérivabilité de la fonction réciproque $h = \tilde{g}^{-1}$. Préciser $h'(1)$.

2. Tracer la courbe représentative C de $\tilde{g}$ dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}$ (unité 2 cm).

   Construire la tangente à C au point d'abscisse 0. Tracer dans le même repère la courbe représentative C' de h.

3. **a.** À l'aide éventuellement d'une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

   b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre C, les droites d'équations $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

   En déduire l'aire $\mathscr{A}'$ du domaine $\mathscr{D}'$ du plan compris entre C', les droites d'équations $y = x$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Partie B

1. Démontrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ admettant pour base $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$, avec

$$\begin{array}{llcl} f_1 : & \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}. \\ f_2 : & \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}\sin x. \\ f_3 : & \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}\cos x. \end{array}$$

2. Soit f un élément de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(a ; b ; c)$ dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' sont des éléments de $\mathscr{E}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Préciser $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de a, b, c.

3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ qui, à la fonction f de coordonnées a, b, c dans la base $\mathscr{B}$ associe la fonction $\tilde{f}$ de coordonnées

$$a' = 3a + 4b,\ b' = -2a - 3b \text{ et } c' = 2a + 2b - c,$$

   dans la même base.

   a. Déterminer D, ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ invariants par φ et vérifier que

$$\mathrm{D} = \left\{ f \in \mathscr{E} / \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

   b. Déterminer P, ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ changés par φ en leur opposé et vérifier que

$$\mathrm{P} = \left\{ f \in \mathscr{E} / \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

   c. Démontrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathscr{E}$. En déduire la nature de φ et l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

4. Soit Φ l'application de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f, g) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) g\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) g'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) g''\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

a. Démontrer que Φ est un produit scalaire défini sur $\mathscr{E}$. Dans toute la suite du problème, $\mathscr{E}$ est muni de ce produit scalaire.

b. Vérifier que le plan vectoriel P et la droite vectorielle D introduits en B 3. sont orthogonaux et préciser alors φ.

5. **a.** Vérifier que, pour le produit scalaire Φ, la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée.

b. On donne

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x-\frac{\pi}{2}}(2-2\sin x+\cos x) \end{array}$$

Vérifier que g_1 est normé. Trouver g_2 normé, orthogonal à g_1 appartenant à P et tel que $g_2''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$.

Soit g_3 le vecteur normé de D tel que $g_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$. Déterminer g_3'' et démontrer que $\left(g_1,\ g_2,\ g_3\right)$ est une base orthonormée qu'on notera $\mathscr{B}'$.