☙ Baccalauréat C Lille juin 1984 ❧

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit, dans le plan affine euclidien P, un carré ABCD, de côté de longueur c, où $c \in \mathbb{R}_+^\star$.
On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même

$$f_\alpha : \begin{array}{ll} P & \to P \\ M & \longmapsto M' \end{array}$$

tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \alpha\,\overrightarrow{M\text{D}}.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.

2. Déterminer, puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que :

$$M\text{A}2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 + M\text{D}^2 = 4c^2.$$

3. Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que :

$$\left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right\|$$

4. Déterminer, puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan P tels que :

$$\left(\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right) = 2c^2.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$2z^3 - (7+2\text{i})z^2 + (11+\text{i})z - 4 = 0. \quad \text{(E)}$$

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle unique α ; la déterminer.

2. Résoudre l'équation (E) et représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, les images A, B, C des solutions.
A désigne l'image de la racine réelle et C l'image de la racine qui a le plus grand module.

3. I étant le point du plan d'affixe i, montrer qu'il existe une similitude de centre I qui transforme A en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit f la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = \text{e}^{-x} \ln x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \dfrac{1}{x}$.

2. Étudier les variations de la fonction g, et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, comprise entre $\dfrac{3}{2}$ et 2. Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$?

3. Vérifier l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire, de l'inégalité $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$, un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Achever l'étude de la fonction f et tracer sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B Recherche d'une valeur approchée de α

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

2. Calculer $h'(x)$ et vérifier que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right], \quad -\frac{4}{9}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \leqslant h'(x) \leqslant -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe un réel $k \in]0\ ;\ 1[$ tel que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right], \quad \left|h'(x)\right| \leqslant k.$$

3. Prouver que, pour tout couple de réels distincts x et y compris entre $\dfrac{3}{2}$ et 2, $|h(x) - h(y)| \leqslant k|x - y|$.

4. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n)$.

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$$

b. En appliquant au couple $(u_n\ ;\ \alpha)$ l'inégalité du 3., prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|,$$

c. En déduire, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha|,$$

et montrer que la suite u converge vers α.

5. Montrer, en utilisant les variations de h que $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ sont de signes contraires, en déduire que α est compris entre les nombres u_n et u_{n+1}.
En justifiant votre méthode, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}_+^\star$, solutions de l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que la fonction f définie en A est solution de cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') : \quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

3. Soit g une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E′).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

N.B. : On notera $\ln x$ le logarithme népérien de x.

La partie C est indépendante des deux autres parties.