Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1985 Lille

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2, \quad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.
   Quel est l'ensemble de définition de f ?
   Montrer que f est strictement décroissante sur $]1~;~+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout entier k au moins égal à 2, on a

   $$\frac{1}{k \ln k} \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   En déduire une minoration de u_n par une intégrale.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = I_n$ en fonction de n $(n \in \mathbb{N},\ n > 2)$ puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
   La suite (u_n) a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **3 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

   $$\left(z^2 - 4z + 5\right) - \mathrm{i}(z+1) = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

   $$\left(z^2 - 4z + 5\right)^2 + (z+1)^2 = 0.$$

3. En déduire qu'il existe des réels A, B, C, D qu'on déterminera tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x^2 + 4x + 5\right)^2 + (x+1)^2 = \left(x^2 + Ax + B\right)\left(x^2 + Cx + D\right).$$

PROBLÈME **12 points**

Le but du problème est d'étudier les images de quelques figures simples par des applications complexes.
Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On note A, B et C les points de P de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{1}{2}~;~\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}~;~-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (1~;~0).$$

Partie A

1. Démontrer qu'il existe une application affine de P, s et une seule, qui laisse invariants les deux points A et B et qui transforme O en C. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s.
2. Pour tout point M du plan, exprimer les coordonnées (x', y') de s(M) en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M, puis l'affixe z' de $s(M)$ en fonction de l'affixe z de M.
3. Déterminer l'image par s du cercle de centre O et de rayon 1.

Partie B

On considère l'application F de P dans P qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = z^2 + 1$.

1. **a.** Déterminer les images par F des points A, B et O.

   b. Déterminer les points invariants par F.
2. **a.** Démontrer que tout point M de P, à l'exception d'un seul que l'on précisera, admet par F deux antécédents distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à O.

   b. On note Z l'affixe de M, distinct de C, et z_1 et z_2 les affixes respectives de m_1 et m_2. Démontrer que :

$$\begin{aligned} \text{O}m_1 &= \text{O}m_2 = \sqrt{\text{CM}}\\ \arg z_1 &= \frac{1}{2}\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \arg z_2 &= \frac{1}{2}\alpha + \pi + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

   où α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\text{CM}}\right)$.

   c. On se propose de construire géométriquement m_1 et m_2.

   Soit (D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tel que $\frac{\alpha}{2}$ soit une mesure de $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{u}\right)$.

   Soit (D′) la perpendiculaire à (D) passant par O. Sur (D′), de part et d'autre de O, on place les points N et P tels que :

$$\text{OP} = 1 \qquad \text{ON} = \text{CM}.$$

   Soit (Γ) le cercle de diamètre [PN].

   Démontrer que (Γ) coupe (D) en m_1 et m_2.
3. Déterminer l'image par F du cercle de centre O et de rayon 1.

   a. Pour tout point m de coordonnées $(x\,;\,y)$, on note $(X\,;\,Y)$ les coordonnées du point $M = F(m)$. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

   b. Déterminer l'image par F de l'axe des abscisses puis de l'axe des ordonnées.

   c. Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'image par F appartient à l'axe des abscisses.
4. (Δ) désigne la droite d'équation $y = 2$.

   a. Démontrer que l'image de (Δ) par F est la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation
   $y^2 = 16(x+3)$.

   b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe, sommet, foyer, directrice.

   c. Construire $(\mathscr{C})$.