Baccalauréat C Lille juin 1986

EXERCICE 1 **5 POINTS**

On considère l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = -6x - 1. \qquad (1)$$

1. Déterminer a et b réels tels que la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation (1).
2. **a.** Démontrer que f, fonction numérique de la variable réelle, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

   b. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

   d. Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 4.$$

3. Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x-3} + x.$$

   Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
   Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour $x \neq 1$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}.$$

   a. Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}.$$

   b. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 - 6x + 1\right) \ln(1 - x)\,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan P orienté est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm).
Dans ce qui suit les équations des courbes et les coordonnées des points seront données dans ce repère.
Soit A le point de coordonnées $(-1~;~0)$.

Partie A

Soit φ la fonction de l'intervalle $[-1~;~1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.$$

1. Étudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative (S_1). Préciser les tangentes ou demi-tangentes à (S_1) aux points A et O.
2. Soit (S_2) l?image de (S_1) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner une équation de (S_2). Vérifier que $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ a pour équation

$$x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

3. Soit λ un réel non nul et N le point de coordonnées $(0~;~\lambda)$. Écrire une équation cartésienne, notée $(\star)$, de la droite (AN) en fonction de λ. Vérifier que le cercle (C_λ) de centre N, passant par O, a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \qquad (2)$$

   Pour tout λ non nul, (AN) et (C_λ) se coupent en deux points distincts d'ordonnée non nulle.
   Exprimer λ en fonction de x et y à l'aide de l'équation (2).
   Reporter l'expression trouvée dans l'équation $(\star)$ et vérifier que les deux points d'intersection de (AN) et (C_λ) appartiennent à (S).
   En déduire une construction de (S), points par points, à la règle et au compas.

Partie B

Les questions de cette partie du problème doivent être résolues sans calculs

M étant un point de P, on se propose d'étudier, s'ils existent, les points M' de P vérifiant à la fois les deux conditions :
(B_1) A, M, M' alignés
(B_2) $\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}M'} = 0$.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [OA].

1. Trouver l'ensemble des points M' dans les cas suivants (on pourra s'aider d'une figure pour chacun des cas) :
   a. M est en O.
   b. M est en A.
   c. M est un point de $(\mathscr{C})$ autre que O et A.
   d. M est un point de l'axe des abscisses autre que O et A.
   e. M est un point de l'axe des ordonnées autre que O.
2. On suppose que le point M n'est pas sur $(\mathscr{C})$. Démontrer qu'il existe un point unique M' vérifiant les conditions B_1 et B_2.
   Donner une construction géométrique de M' (faire un dessin).

3. Soit $\mathrm{P}^{\star}$ le plan privé du cercle $(\mathscr{C})$ et des axes de coordonnées.
À tout point M de $\mathrm{P}^{\star}$, on associe le point M' vérifiant les conditions B_1 et B_2.
Démontrer que M' est un point de $\mathrm{P}^{\star}$. On note f l'application de $\mathrm{P}^{\star}$ dans $\mathrm{P}^{\star}$ qui à M associe $M' = f(M)$.
Démontrer que $f \circ f$ est l'identité de $\mathrm{P}^{\star}$.

Partie C

On désigne par f l'application précédemment définie.

1. Soit $\left(S^{\star}\right)$ la courbe (S) privée de A et O. En utilisant les questions A 2. et B 3., déterminer $f\left(S^{\star}\right)$.

2. **a.** Soient $(x\,;\,y)$ les coordonnées de M et $\left(x'\,;\,y'\right)$ celles de $M' = f(M)$.

Vérifier que $x' = \dfrac{-y^2}{x^2+y^2+x}$, $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2+x}$.

b. Soit (E) la courbe d'équation $4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + 8y^2 = 1$.

Tracer (E). Préciser sa nature, ses éléments de symétrie, ses sommets.

c. Soit $\left(D^{\star}\right)$ la droite d'équation $x = 1$ privée de son point d'ordonnée nulle. Démontrer que $f\left(D^{\star}\right)$ est la courbe (E) privée de O et A.