

♣ Baccalauréat C Lille juin 1986 ♣

EXERCICE 1

5 POINTS

On considère l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = -6x - 1. \quad (1)$$

- Déterminer a et b réels tels que la fonction polynôme g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation (1).
- Démontrer que f , fonction numérique de la variable réelle, deux fois dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

- Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$.
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 4.$$

- Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{3x-3} + x.$$

Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Préciser la tangente au point A d'abscisse 1 et tracer cette tangente.

EXERCICE 2

5 POINTS

- Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie pour $x \neq 1$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - x}.$$

- Déterminer a, b, c, d réels tels que l'on ait, pour $x \neq 1$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}.$$

- Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 6x + 1) \ln(1-x) dx.$$

PROBLÈME**12 POINTS**

Le plan P orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

Dans ce qui suit les équations des courbes et les coordonnées des points seront données dans ce repère.

Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$.

Partie A

Soit φ la fonction de l'intervalle $[-1; 1[$ dans \mathbb{R} définie par

$$\varphi(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1. Étudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative (S_1) . Préciser les tangentes ou demi-tangentes à (S_1) aux points A et O.
2. Soit (S_2) l'image de (S_1) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donner une équation de (S_2) . Vérifier que $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ a pour équation

$$x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

3. Soit λ un réel non nul et N le point de coordonnées $(0; \lambda)$. Écrire une équation cartésienne, notée (\star) , de la droite (AN) en fonction de λ . Vérifier que le cercle (C_λ) de centre N, passant par O, a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \quad (2)$$

Pour tout λ non nul, (AN) et (C_λ) se coupent en deux points distincts d'ordonnée non nulle.

Exprimer λ en fonction de x et y à l'aide de l'équation (2).

Reporter l'expression trouvée dans l'équation (\star) et vérifier que les deux points d'intersection de (AN) et (C_λ) appartiennent à (S) .

En déduire une construction de (S) , points par points, à la règle et au compas.

Partie B

Les questions de cette partie du problème doivent être résolues sans calculs

M étant un point de P, on se propose d'étudier, s'ils existent, les points M' de P vérifiant à la fois les deux conditions :

(B₁) A, M, M' alignés

(B₂) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$.

Soit (\mathcal{C}) le cercle de diamètre [OA].

1. Trouver l'ensemble des points M' dans les cas suivants (on pourra s'aider d'une figure pour chacun des cas) :
 - a. M est en O.
 - b. M est en A.
 - c. M est un point de (\mathcal{C}) autre que O et A.
 - d. M est un point de l'axe des abscisses autre que O et A.
 - e. M est un point de l'axe des ordonnées autre que O.
2. On suppose que le point M n'est pas sur (\mathcal{C}) . Démontrer qu'il existe un point unique M' vérifiant les conditions B_1 et B_2 .
Donner une construction géométrique de M' (faire un dessin).
3. Soit P^* le plan privé du cercle (\mathcal{C}) et des axes de coordonnées.
À tout point M de P^* , on associe le point M' vérifiant les conditions B_1 et B_2 .
Démontrer que M' est un point de P^* . On note f l'application de P^* dans P^* qui à M associe $M' = f(M)$.
Démontrer que $f \circ f$ est l'identité de P^* .

Partie C

On désigne par f l'application précédemment définie.

1. Soit (S^*) la courbe (S) privée de A et O. En utilisant les questions A 2. et B 3., déterminer $f(S^*)$.
2. a. Soient $(x; y)$ les coordonnées de M et $(x'; y')$ celles de $M' = f(M)$.
Vérifier que $x' = \frac{-y^2}{x^2 + y^2 + x}$, $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2 + x}$.
b. Soit (E) la courbe d'équation $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8y^2 = 1$.
Tracer (E) . Préciser sa nature, ses éléments de symétrie, ses sommets.
c. Soit (D^*) la droite d'équation $x = 1$ privée de son point d'ordonnée nulle. Démontrer que $f(D^*)$ est la courbe (E) privée de O et A.