Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille septembre 1969

EXERCICE 1

On considère, dans l'espace rapporté à un trièdre Oxyz, les points variables A, B, C de coordonnées respectives

$$\text{A} : (a\ ;\ 0\ ;\ 0), \text{B} : (0\ ;\ b\ ;\ 0), \text{C} : (0\ ;\ 0\ ;\ c),$$

affectés chacun des coefficients suivants :
pour A : $(b+c)$, pour B : $(c+a)$, pour C : $(a+b)$.
Les nombres réels variables a, b, c sont tels que

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{et} \quad ab+bc+ca=0.$$

1. Montrer que ces trois points ont un barycentre, G, et calculer les coordonnées, x, y et z, de celui-ci en fonction de a, b, c.
2. Calculer $x+y+z$ et en déduire l'ensemble des points G.

EXERCICE 2

Soit, dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, les points fixes

$$\text{A} : (x=2\ ;\ y=0), \qquad \text{B} : (x=0\ ;\ y=1),$$

puis les points variables
M : $x = 2(1+r\cos t)$, $y = 2r\sin t$,
N : $x = r\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y = 1+r\sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
où r et t sont des variables réelles, $r \neq 0$.

1. Comparer les modules des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}N}$; trouver l'angle $\left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{B}N}\right)$ et en déduire la nature de la transformation qui fait correspondre au vecteur $\overrightarrow{\text{A}M}$ le vecteur $\overrightarrow{\text{B}N}$.
2. Préciser le point double de cette transformation.

PROBLÈME

Partie A

Soit un polygone régulier convexe de 7 côtés, ABCDEFG, inscrit dans un cercle de centre O, dont le rayon est pris comme unité de longueur.

1. On effectue la rotation de centre O, d'angle $\dfrac{2\pi}{7}$.
   Que peut-on dire de la transformée de la figure ? En déduire que
   $$\overrightarrow{\text{O}A}+\overrightarrow{\text{O}B}+\overrightarrow{\text{O}C}+\overrightarrow{\text{O}D}+\overrightarrow{\text{O}E}+\overrightarrow{\text{O}F}+\overrightarrow{\text{O}G} = \overrightarrow{0},$$
   puis, en projetant sur un axe portant l'un des vecteurs ($\overrightarrow{\text{O}A}$ par exemple), que
   $$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

2. Poser $x = \cos\dfrac{2\pi}{7}$ et prouver qu'il est l'une des racines de l'équation

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

sur l'intervalle $(0\,;+1)$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule sur l'intervalle $(0\,;+1)$.

3. En déduire que $0,62 < \cos\dfrac{2\pi}{7} < 0,63$.

Partie C

1. Soit $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ les racines réelles ou complexes de l'équation

$$z^7 - 1 = 0.$$

   a. Les représenter géométriquement.

   b. Calculer leur somme et leur produit.

   c. p étant un entier naturel non nul, calculer

$$S_p = z_1^p + z_2^p + z_3^p + z_4^p + z_5^p + z_6^p + z_7^p$$

   dans les deux cas suivants :
   p est multiple de 7 ;
   p n'est pas multiple de 7.
   On commencera par calculer la somme S_p pour

$$p = 1, \quad p = 2 \quad \text{et } p = 3\,;$$

   on en déduira la valeur de S_p si p n'est pas multiple de 7.

2. Écrire le polynôme $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels, certains d'entre eux faisant intervenir des lignes trigonométriques de

$$\frac{2\pi}{7}, \quad \frac{4\pi}{7}, \quad \text{et} \quad \frac{6\pi}{7}.$$

.