# ∽ Baccalauréat C Lille septembre 1973 ∾

**EXERCICE 1**

Soit la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}.$$

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Trouver la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ quand $x$ tend vers 0.

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs négatives.
3. Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative (C).

   Quelle est la tangente à la courbe (C) au point O d'origine des axes ?

**EXERCICE 2**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_n & = & \dfrac{1}{3}u_{n-1} - 4 \quad \text{pour tout } n > 0 \text{ de } N. \end{array}\right.$$

1. Démontrer, par récurrence, que la différence $u_n - u_{n-1}$ de deux termes consécutifs garde un signe constant ; en déduire le sens de variation de cette suite.
2. Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

   $$v_n = u_n + 6.$$

   Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et trouver sa limite quand $n$ augmente indéfiniment.
3. Déterminer le plus petit élément $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < -5,99.$$

**EXERCICE 3**

Soit P un plan affine euclidien réel muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
À tout point M, de coordonnées $(x~;~y)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

**Partie A**

1. Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes l'équation

   $$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

   Soit $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les racines ($\alpha_1$ étant celle dont le point image a des coordonnées positives).
2. On appelle $s_1$ et $s_2$ les applications ponctuelles qui, à un point M d'affixe $z$, associent respectivement $m_1$ d'affixe $\alpha_1 z$ et $m_2$ d'affixe $\alpha_2 z$.

   Reconnaitre $s_1$ et $s_2$ ; en préciser les éléments caractéristiques.

**3.** Soit T l'application de P dans P qui, au point M, associe $M' = T(M)$, $M'$ étant le barycentre du point $m_1 = s_1(M)$ affecté du coefficient $-1$ et du point $m_2 = s_2(M)$ affecté du coefficient 2.

**a.** Prouver que T est une similitude.
Préciser la position relative des points M, $m_1$, $m_2$, M′.

**b.** Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre AB : A $(2 ; 0)$ ; B$(0 ; 6)$.
Quelle est l'image $(\Gamma_1)$ de $(\Gamma)$ par l'application T ?

**Partie B**

On considère l'équation, où $m$ est un paramètre réel,

$$Z \in \mathbb{C}; \quad z^2 + 2(m-1)z - 5m^3 + 3m + 2 = 0.$$

**1.** Discuter, selon les valeurs de $m$, si les racines $\beta_1$ et $\beta_2$ de cette équation sont réelles ou non, et préciser leurs expressions dans chaque cas.

**2.** Soit $S_1$ et $S_2$ les applications de P dans P qui, au point M d'affixe $z$, associent respectivement $M_1$ d'affixe $\beta_1 z$, et $M_2$ d'affixe $\beta_2 z$.
Reconnaître ces applications. Pour quelles valeurs de $m$ sont-elles des homothéties ?

**Partie C**

On considère l'application F de P dans P :

$$M(x\,;\,y) \longmapsto F(M) \left\{\begin{array}{lcl} X &=& \dfrac{\sqrt{2}}{10}x - \dfrac{\sqrt{2}}{4}y \\ Y &=& \dfrac{\sqrt{2}}{10}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y. \end{array}\right.$$

**1.** Prouver que F est la composée d'une application affine bijective G et d'une rotation R de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ : $F = R \circ G$.
Écrire les équations définissant G et prouver que G laisse globalement invariantes les deux droites d'équations $x = 0$, $y = 0$.
Quelles sont les restrictions de G à chacune de ces droites ?

**2.** On reprend le cercle $(\Gamma)$ de diamètre AB et la transformation T de la première partie.

**a.** Tracer la courbe $(\Gamma_2)$, transformée de $(\Gamma)$ par $G \circ T$.

**b.** Tracer la courbe $(\Gamma_3)$, transformée de $(\Gamma)$ par $F \circ T$.