Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Lille

EXERCICE 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\sqrt{1-x}-x=0$$

et préciser le signe de $P(x) = 2\sqrt{1-x}-x$ suivant les valeurs de x pour lesquelles $P(x)$ a un sens.

2. Étudier les variations de la fonction f_1 de la variable réelle définie par

$$x \longmapsto x\text{e}^{\sqrt{1-x}}$$

et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On calculera les coordonnées des points remarquables avec toute la précision permise par les tables et l'on précisera les tangentes en ces points, si elles existent.

EXERCICE 2

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher (c'est-à-dire que toutes les boules ont même probabilité d'être tirées).
5 boules sont numérotées « 1 » ; les 5 autres sont numérotées « 2 ».
On tire simultanément 5 boules. On appelle X le total des points obtenus.

1. Étudier la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Étudier et représenter la fonction de répartition de X.
3. Donner l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME

Partie A

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on définit la loi de composition interne notée $\star$ de la façon suivante :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = a + \text{i}b, \quad (a,\, a',\, b,\, b') \in \mathbb{R}^4$$

$$z' \in \mathbb{C}, \quad z' = a' + \text{i}b', \quad z \star z' = aa' + \text{i}(ab' + ba')$$

1. Démontrer que cette loi est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition habituelle des nombres complexes.
En déduire que $(\mathbb{C},\, +,\, \star)$ est un anneau commutatif et unitaire.
2. Etudier les éléments symétrisables pour la loi $\star$.
En déduire un sous-ensemble $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ ayant une structure de groupe pour cette loi.

Partie B

Soit un plan affine euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ $(x,~y$ réels) est appelé l'affixe du point M de ce plan qui a pour coordonnées x et y.
Le nombre complexe $z_0 = a + \text{i}b$ $(a,~b$ réels) étant donné, à tout nombre complexe z on associe le nombre complexe $z' = z_0 \star z$. On définit ainsi une application, noté f_{z_0} ou $f_{(a,~b)}$ de P vers P, qui à tout point $M(x~;~y)$ d'affixe z associe le point $M'\left(x'~;~y'\right)$ d'affixe z'.

1. Montrer que $f_{(a,~b)}$ est une application affine et donner ses équations dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Quelles conditions doivent vérifier les réels a, b pour que $f_{(a,~b)}$ soit bijective ? Involutive ?

2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications $f_{(a,~b)}$ bijectives. Montrer que $(\mathcal{T},~\circ)$ est un groupe de transformations de P (on pourra utiliser les résultats du A 2.)
Montrer que les sous-ensembles :

$$\begin{array}{lcl}\mathcal{T}_1 & = & \left\{f_{(a,~b)} \in \mathcal{T}~|a = 1\right\}\\ \mathcal{T}_{22} & = & \left\{f_{(a,~b)} \in \mathcal{T}~|a \in \mathbb{R}^{\star}~\text{et}~b = 0\right\}\end{array}$$

en sont des sous-groupes,

3. Soit $f_{(a,~b)}$ une application quelconque de $\mathcal{T}$.
Déterminer les points de P invariants par $f_{(a,~b)}$. Donner les images par l'application $f_{(a,~b)}$ et par sa réciproque des axes de coordonnées $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$ et $\left(\text{O},~\vec{\jmath}\right)$.
À quelles conditions une droite (D) de P a-t-elle pour image par $f_{(a,~b)}$ une droite (D') strictement parallèle à (D) [c'est-à-dire telle que $(D') \cap (D) = \emptyset$] ?

4. Soit (Γ) la conique d'équation, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$:

$$\frac{x^2}{4} - x - y + 1 = 0$$

Déterminer la nature de (Γ) ainsi que ses éléments remarquables, Montrer que (Γ'), transformée de (Γ) par une application $f_{(a,~b)}$ de $\mathcal{T}$ est une conique de même nature.
Déterminer (Γ') dans le cas $a = 2$ et $b = 1$, et construire (Γ) et (Γ') sur un même graphique.
Calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes.