

∞ Baccalauréat C Lille septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

On note $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{11}$ les éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ les diviseurs de zéro.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \quad x^2 - \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}.$$

où $\bar{4}, \bar{3}, \bar{0}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(On pourra éventuellement essayer de mettre l'expression : $x^2 - 4x + 3$ sous forme d'un produit de facteurs).

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation :

$$(1+i)z^2 - 2i(1+m)z + (i-1)(m^2+1) = 0 \quad (1)$$

z étant l'inconnue complexe et m un paramètre complexe.

2. Dans un plan affine euclidien E , rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M de coordonnées $(x; y)$ le nombre complexe $z = x + iy$ on dit que M est l'image de z , z l'affixe du point M .

Soit M_1 et M_2 les images de z_1 et z_2 solutions de l'équation (1), montrer que M_2 est l'image de M_1 dans une rotation (indépendante du paramètre m) dont on précisera le centre et l'angle.

PROBLÈME

On considère, dans ce problème,

- un plan vectoriel euclidien \mathcal{P} muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
- un plan affine euclidien P portant le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ associé au plan vectoriel \mathcal{P} .

Partie A

Soit φ l'endomorphisme du plan vectoriel dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel donné.

1. Montrer que l'ensemble des vecteur invariants par φ est une droite vectorielle \mathcal{D} dont une base est le vecteur unitaire \vec{u} tel que θ soit une mesure de l'angle (\vec{i}, \vec{u}) .
2. Montrer que \mathcal{D} est la seule droite vectorielle invariante de \mathcal{P} par φ .
3. Démontrer que le noyau de φ est la droite vectorielle \mathcal{D}' orthogonale à \mathcal{D} .
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs \vec{v}' , images des différents vecteurs \vec{v} du plan vectoriel \mathcal{P} par φ .

Partie B

On se donne, dans le plan affine P , le point A , de coordonnées α et β , dans le repère \mathcal{R} , ainsi que la droite D , passant par A et de direction la droite vectorielle \mathcal{D} .

1. Montrer que les coordonnées x' et y' du point M' , projection orthogonale, sur la droite D , du point M de coordonnées x et y sont données par :

$$\begin{cases} x' &= x \cos^2 \theta + y \sin \theta \cos \theta + \alpha \sin^2 \theta - \beta \sin \theta \cos \theta \\ y' &= x \sin \theta \cos \theta + y \sin^2 \theta - \alpha \sin \theta \cos \theta + \beta \cos^2 \theta \end{cases}$$

2. Montrer que l'application f qui associe ainsi, à tout point M de P , sa projection orthogonale, M' , sur D est une application affine dont l'endomorphisme associé est φ , l'endomorphisme étudié plus haut.

Partie C

On considère l'ensemble des droites (D_θ) du plan P d'équation :

$$x \sin^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 0; \quad \theta \in]0; \pi[.$$

1. Montrer que toute droite (D_θ) est tangente à la parabole (\mathcal{C}) d'équation $y^2 - 4x = 0$ en un point M .
Préciser, en fonction de θ , les coordonnées du point M .
2. On projette, orthogonalement en F' , le foyer F de (\mathcal{C}) , sur chacune des droites (D_θ) .
Quel est l'ensemble des points F' ?
3. Toute tangente à la courbe (\mathcal{C}) est-elle une droite (D_θ) ? En déduire une propriété de (\mathcal{C}) .
4. On projette orthogonalement l'origine O du repère (\mathcal{R}) en O' sur la tangente en M à (\mathcal{C}) . Montrer que l'ensemble (Γ) des points O' quand M décrit la parabole, comprend la courbe (Γ_1) représentative de la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$x \longmapsto g(x) = \sqrt{\frac{-x^3}{x+1}}$$

Étudier les variations de g et tracer (Γ_1) puis (Γ) .