Baccalauréat C Lille septembre 1980

EXERCICE 1

On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}\ ;\ +\ ;\ \times)$ dont on notera les éléments :

$$\dot{0}\ ;\ \dot{1}\ ;\ \ldots\ ;\dot{p}\ ;\ \ldots\ ;\ \dot{19}\ ;\ p \in [1\ ;\ 19].$$

1. Démontrer que p est inversible dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ si, et seulement si, p et 20 sont premiers entre eux.
   En déduire les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$.
2. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{4}x + \dot{3}y &=& \dot{10}\\ \dot{5}x + \dot{6}y &=& \dot{17}.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{Log}\,|x-1| - x\mathrm{Log}\,x$$

(Log représente la fonction logarithmique népérien).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et les variations de f
2. Soit la fonction g définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl}g(0) &=& 0,\\ g(1) &=& 0,\\ g(x) &=& f(x) \quad \forall x \in]0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[.\end{array}\right.$$

   Démontrer que g est continue en 1 et à droite en 0.
   g est-elle dérivable en 1 ? à droite en 0 ?
3. Démontrer que $f(x)$ admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   On pourra remarquer que

$$\forall x \in]1\ ;\ +\infty[, \quad f(x) = x\mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \mathrm{Log}(x-1).$$

4. Terminer l'étude de la fonction g et représenter graphiquement g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (On choisira pour unité : 2 cm.)
5. Soit $\lambda \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$. Calculer en cm^2 l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $x,\ y$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, tels que

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \lambda, \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x).$$

PROBLÈME

Partie A

$\mathscr{E}$ étant un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des automorphismes φ de $\mathscr{E}$ qui conservent l'orthogonalité », c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}, \quad \left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}, \quad \left(\overrightarrow{V}\,\overrightarrow{W} = 0 \Rightarrow \varphi\left(\overrightarrow{V}\right) \cdot \varphi\left(\overrightarrow{W}\right) = 0\right).$$

1. Vérifier que les homothéties vectorielles et les isométries vectorielles de $\mathscr{E}$ appartiennent à $\mathscr{S}$.
2. **a.** Démontrer que l'image par φ de la base $\mathscr{B}$ est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{E}$ orthogonale et dont les vecteurs ont même norme.
   [On pourra utiliser des vecteurs tels que $\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$.]
   On posera alors $\left\|\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right)\right\| = \alpha$.

   b. Démontrer que $\forall \overrightarrow{V} \in \mathscr{E}$, $\left\|\varphi\left(\overrightarrow{V}\right)\right\| = \alpha \left\|\overrightarrow{V}\right\|$.
   Le réel α sera appelé rapport de φ.

   c. Démontrer que φ est la composée commutative d'une isométrie vectorielle unique et de l'homothétie vectorielle de rapport α.
3. Soit un endomorphisme u non nul de $\mathscr{E}$ vérifiant

$$u\left(\overrightarrow{\imath}\right) \cdot u\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = u\left(\overrightarrow{\jmath}\right) \cdot u\left(\overrightarrow{k}\right) = u\left(\overrightarrow{k}\right) \cdot u\left(\overrightarrow{\imath}\right) = 0$$

   et

$$\left\|u\left(\overrightarrow{\imath}\right)\right\| = \left\|u\left(\overrightarrow{\jmath}\right)\right\| = \left\|u\left(\overrightarrow{k}\right)\right\|;$$

   montrer que u est un élément de $\mathscr{S}$.
   Application. - Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par

$$u\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} - 2\overrightarrow{k}\,; u\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = -2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - 2\overrightarrow{k}\,; u\left(\overrightarrow{k}\right) = -2\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}.$$

   Montrer que u est élément de $\mathscr{S}$. Déterminer son rapport.
   Écrire u comme composé d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle que l'on précisera.
4. Montrer que $\mathscr{S}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe non commutatif.

Partie A

Soit f_1, f_2, f_3 les fonctions numériques de la variable réelle x définies par

$$f_1(x) = \cos 4x, \quad f_2(x) = \sin 4x, \quad f_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel engendré par f_1, f_2, f_3.

1. **a.** Démontrer que, pour tous g et h éléments de $\mathscr{F}$, $g \times h$ est intégrable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Calculer, pour tous p et q, éléments de $\{1, 2, 3\}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_p(x) f_q(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Soit θ l'application de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\theta(g, h) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose

$$g = af_1 + bf_2 + cf_3 \quad \text{et} \quad h = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3.$$

Calculer $\theta(g,\ h)$ en fonction des réels a, b, c, a', b', c'. En déduire que θ est un produit scalaire sur $\mathscr{F}$ et que $\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathscr{F}$.

2. a. Pour tout n élément de $\mathbb{N}^\star$ calculer les dérivées d'ordre n des fonctions f_1, f_2, f_3 que l'on notera respectivement $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$, $f_3^{(n)}$.
En déduire que, pour tout g élément de $\mathscr{F}$, $g^{(n)}$ existe.

b. Pour tout n élément de $\mathbb{N}^\star$, on considère l'application φ_n de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ qui à

$$g = af_1 + bf_2 + cf_3 \quad \text{associe} \quad \varphi_n(g) = g^{(n)} + 4^n cf_3.$$

Quelle est l'image par φ_1 de la base $\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$?
Montrer que φ_1 est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle que l'on précisera. Mêmes questions pour φ_2, pour φ_3.
Quels sont les entiers naturels n tels que φ_n soit une homothétie vectorielle ?