↫ Baccalauréat C Lille septembre 1977 ↬

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, et assimilé au plan complexe.
Soit P* le plan P privé du point O.
On considère l'application f de P* vers lui-même, qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' par la relation

$$z' \cdot \overline{z} = a^2,$$

a étant un réel donné non nul, et $\overline{z}$ le conjugué de z.

1. Démontrer que l'application f est involutive.
   Quel est l'ensemble des points invariants ?
2. Démontrer que les points O, M, M' sont alignés et que $\overline{\text{O}M} \cdot \overline{\text{O}M'} = a^2$.
3. Quelles sont les images
   a. des droites passant par O ?
   b. des cercles de centre O ?
   c. de la droite d'équation $x = |a|$?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\text{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. Par une intégration par parties, calculer I_1.
3. Montrer que, pour tout entier non nul n, on a la relation de récurrence :

$$(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

On rappelle que l'ensemble M des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $a.M + b$. I où 7) et 1 = (1 - 5 0

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et a et b sont des nombres réels arbitraires.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de M et que sa dimension est 2.

2. Prouver que $M^2 + M - 6.\mathrm{I} = 0$ où 0 désigne la matrice nulle.
En déduire que la multiplication des matrices est une loi interne dans E, et que l'addition et la multiplication des matrices munissent E d'une structure d'anneau commutatif et unitaire.

3. a. Résoudre dans E l'équation

$$X^2 = X.$$

On trouve quatre solutions : la matrice nulle 0, la matrice unité I et deux autres A et B, que l'on exprimera en fonction de M et de I.

b. Démontrer que $A \cdot B. = B \cdot A = 0$.

c. Démontrer que (A ; B) est une base de E.

4. Résoudre dans E l'équation

$$Y^2 = 1.$$

On trouve ainsi quatre solutions : I, $-$I et deux autres S et $-S$ que l'on exprimera en fonction de M et de I.

Partie B

Soit π un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\ \vec{\imath}\right)$. On désigne par $\Phi_A, \Phi_B, \Phi_S, \Phi_{-S}$ les endomorphismes de π, de matrices respectives A, B, S et $-S$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Quelle est la nature géométrique de Φ_A et Φ_B ? Démontrer que :

$$\text{Image de}\,\Phi_A = \text{Noyau de }\ \Phi_B$$
$$\text{et Image de}\Phi_B = \text{Noyau de }\ \Phi_A$$

Expliquer alors pourquoi le produit $A \cdot B$ est nul.

2. Déduire de A 4. que Φ_S et Φ_{-S} sont involutives. Reconnaître les endomorphismes Φ_S et Φ_{-S} et préciser leurs éléments caractéristiques.

Partie C

Soit P le plan affine euclidien associé à π, et rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Écrire les équations analytiques des applications affines associées à Φ_S et Φ_{-S} et laissant le point O invariant. On les appelle f_s et f_{-s}. Les reconnaître.

2. Étudier, et représenter graphiquement dans le plan P, les variations de la fonction

$$g : x \longmapsto g(x) = \frac{1}{14}\left[-9x + 5\sqrt{x^2+1}\right].$$

Soit (C) la courbe représentative. Montrer qu'elle admet pour asymptotes les droites d'équation $x + y = 0$ et $2x + 7y = 0$.

3. Soit la fonction

$$h : x \longmapsto h(x) = \frac{1}{14}\left[-9x - 5\sqrt{x^2+1}\right].$$

et (C') sa courbe représentative.
En remarquant que $h(-x) = -g(x)$, dites quelle est la transformation qui permet de passer de (C) à (C'). Construire alors (C').
Montrer que l'équation de la courbe $(\Gamma) = (C) \cup (C')$ peut s'écrire :

$$28(2x+7y)(x+y) - 25 = 0.$$

4. Prendre le nouveau repère suivant $\left(O,\ \overrightarrow{\imath'},\ \overrightarrow{\jmath'}\right)$

$$\left\{\begin{array}{ccc}\overrightarrow{\imath'} & = & \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\\ \overrightarrow{\jmath'} & = & 7\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath}\end{array}\right.$$

Trouver l'équation de (Γ) dans ce repère et en déduire sa nature géométrique.

5. On transforme la courbe (Γ) par f_s et f_{-s}.
Montrer que $f_s(\Gamma) = f_{-s}(\Gamma)$.
Soit (Γ') la courbe obtenue. Quelle est son équation dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath'},\ \overrightarrow{\jmath'}\right)$. La reconnaître et la construire.