∽ Baccalauréat C septembre 1981 Lille ∾

EXERCICE 1

1. Déterminer dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 30.
2. Trouver les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels non nuls dont le plus grand commun diviseur Δ et le plus petit commun multiple M vérifient

$$3M - 2\Delta = 30.$$

EXERCICE 2

Soit P un plan euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$. On rappelle qu'à tout point M du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on peut associer le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ appelé affixe du point M.
Soit A, B, C, D, quatre points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4.

1. Montrer que le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré si, et seulement si, les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 vérifient les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_2 - z_1 & = & z_3 - z_4\\ z_3 - z_1 & = & \pm\mathrm{i}\,(z_4 - z_2)\,. \end{array}\right.$$

2. Montrer qu'alors l'affixe z_0 du point I intersection de AC et BD vérifie

$$(z_1 - z_0)^4 = (z_2 - z_0)^4 = (z_3 - z_0)^4 = (z_4 - z_0)^4\,.$$

3. Construire le carré dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_1 + z_2 = 0$.
Déterminer les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 dans ce cas.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désignera l'intervalle $]-1\ ;\ +1[$. On rappelle que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 est un anneau pour l'addition et la multiplication.

Partie A

À tout réel x de E, on associe, par l'application M, la matrice

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & -x\\ -x & 1\end{pmatrix}$$

On désignera par $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M(x)$ quand x appartient à E.

1. Démontrer que M est une bijection de E sur $\mathcal{M}$.
2. Démontrer que

$$\forall x,\ x \in \mathrm{E}\,;\forall x',\ x' \in \mathrm{E},\ \frac{x+x'}{1+xx'} \in \mathrm{E}\ \text{et}\ M(x) \times M\left(x'\right) = M\left(\frac{x+x'}{1+xx'}\right)$$

puis que $\mathcal{M}$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre de l'inverse de $M(x)$.

3. On définit sur E la loi $\star$ par x + x'

$$\forall x,\ x \in \mathrm{E}\,; \forall x',\ x' \in \mathrm{E} : x \star x' = \frac{x + x'}{1 + xx'}$$

4. Dans cette question, $\mathscr{P}$ désigne un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On désigne par p_1 et p_2 les endomorphismes de $\mathscr{P}$ de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Calculer les matrices dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ des endomorphismes $p_1 \circ p_1, p_2 \circ p_2, p_2 \circ p_1, p_1 \circ p_2$. En déduire que p_1 et p_2 sont deux projections vectorielles que l'on caractérisera géométriquement.

5. Démontrer qu'il existe un réel λ strictement positif que l'on exprimera en fonction de x tel que $M(x) = \lambda M_1 + \dfrac{1}{\lambda} M_2$. (où x est élément de E).

6. On pose $[M(x)]^1 = M(x)$ et

$$\forall n, n \in \mathbb{N} - \{0,\ 1\} \quad [M(x)]^n = M(x) \times [M(x)]^{n-1}.$$

En utilisant les résultats des questions 4. et 5. calculer $[M(x)]^n$ si n est un entier naturel non nul.

Partie B

Soit f la fonction définie sur E par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithmique népérien.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative rt dans un repère orthonormé $(\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan affine euclidien P.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine, ensemble des points $M(x\,;\ y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, où $\alpha \in]0\,;\ 1[$.

Cette aire admet-elle une limite quand α tend vers 1 par valeurs inférieures ?

3. Établir que f est une bijection de E sur $\mathbb{R}$. On pose, si $x \in$ E, $y = f(x)$. Exprimer $x = f^{-1}(y)$ en fonction de y.

4. Démontrer que

$$\forall x,\ x \in \mathrm{E}\,; \forall x',\ x' \in \mathrm{E} : f\left(x \star x'\right) = f(x) + f\left(x'\right)$$

c'est-à-dire que f est un isomorphisme du groupe E muni de la loi $\star$ (définie au A 3) sur le groupe $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

5. On définit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}$ par $N = M \circ f^{-1}$ c'est-à-dire que si $y = f(x)$, $N(y) = M(x)$. En utilisant le B 3. montrer que

$$\forall y, y \in \mathbb{R}, \quad N(y) = \mathrm{e}^{y} M_1 + \mathrm{e}^{-y} M_2$$

où M_1 et M_2 sont les matrices introduites au A 4.
Ceci ne pouvait-il pas être obtenu en utilisant un résultat du A ?

6. Démontrer que

$$\forall y, y \in \mathbb{R} ; \forall y', y' \in \mathbb{R}, \quad N(y) \times N\left(y'\right) = N\left(y + y'\right).$$

On pose $[N(y)]^1 = N(y)$ et

$$\forall n, n \in \mathbb{N} - \{0,\ 1\}, \quad [N(y)]^n = N(y) \times [N(y)]^{n-1}.$$

Établir par récurrence que

$$\forall n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad [N(y)]^n = N(ny).$$

Retrouver ainsi le résultat du A 6.