Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille septembre 1985

EXERCICE 1 **4 points**

On considère les deux suites de nombres réels, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \left\{\begin{array}{l c l} u_n &=& \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2}\\ v_n &=& \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2}\cdots + \dfrac{n}{n^2}\end{array}\right.$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de variable réelle :

$$\begin{array}{l c l} x & \longmapsto & x - \sin x\\ x & \longmapsto & -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x\\ x & \longmapsto & -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x\end{array}$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

b. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leqslant n^4.$$

Déduire du a. l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

pour tout entier naturel n non nul.

c. Démontrer que la suite u est convergente ; quelle est sa limite ?

EXERCICE 2 **4 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

2. Soit F la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.
Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on précisera.
Soit G la bijection réciproque de F.
Montrer que pour tout x appartenant à $[1~;~+\infty[$,

$$G(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

3. Sur quel intervalle G est-elle dérivable ? Préciser $G'(x)$.
En déduire $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x$.

PROBLÈME **4 points**

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés géométriques relatives à une parabole.

Partie A

Le plan affine étant supposé orienté, les notations (D, D′) et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ désigneront l'une des mesures des angles orientés du couple de droites (D, D′) et du couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre 0, et soit H son orthocentre. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centres O_1 et O_2, symétriques du cercle $\mathscr{C}$, respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).

1. Soit α le symétrique de H par rapport à la droite (AB).
   Justifier que $(\alpha\text{A}, \alpha\text{C}) = -(\text{HA}, \alpha\text{C}) \quad [\pi]$.
   Montrer que $(\alpha\text{A}, \alpha\text{C}) = (\text{BA}, \text{BC}) \quad [\pi]$.
   Que peut-on en déduire pour α, puis pour H ?
   Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$?
2. Montrer que $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par une rotation R de centre A dont vous préciserez une mesure de l'angle.
3. Soit M un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$, dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B′ et C′. Justifier les égalités suivantes :

$$R(\text{C}') = B' \,; \quad (\text{HB}', \text{HA}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{O}_2\text{B}'}, \overrightarrow{\text{O}_1\text{A}}\right) \quad [\pi];$$

$$(\text{HC}', \text{HA}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{O}_1\text{C}'}, \overrightarrow{\text{O}_1\text{A}}\right) \quad [\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\text{O}_2\text{B}'}, \overrightarrow{\text{O}_2\text{A}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{O}_1\text{C}'}, \overrightarrow{\text{O}_1\text{A}}\right) \quad [2\pi]$$

   En déduire que $(\text{HB}', \text{HC}') = 0 \ [\pi]$. Que petit-on déduire pour les points H, B′, C′ puis pour les points H, A′, B′, C′ où A′ est le symétrique de M par rapport à la droite (BC) ?
4. Montrer que les points I, J, K milieux respectifs des segments [MN], [MB′], [MC′] sont alignés.
5. Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J, I sur les droites (AB), (AC), (BC) sont alignés. Démontrer que M appartient au cercle $\mathscr{C}$. (On pourra montrer que les points M, I, J, C d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques).

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
(Oy) désigne l'axe des ordonnées.
Soit $\mathscr{P}$ la conique d'équation $y^2 = 4x$; un point de coordonnées $(x\,;\, y)$ vérifiant
$y^2 > 4x$ est dit extérieur à $\mathscr{P}$; il sera admis que par un tel point, passent deux tangentes à la conique $\mathscr{P}$.

1. Préciser la nature de $\mathscr{P}$ ainsi que ses éléments caractéristiques : foyer F, sommet S, directrice D, axe, tangente au sommet. Construire $\mathscr{P}$ ainsi que ses éléments caractéristiques.
2. Soit M un point de $\mathscr{P}$ de projeté orthogonal M′ sur D.
   Soit Δ la tangente à $\mathscr{P}$ au point M. Soient T un point de Δ et U le milieu du segment [M′F].
   En rappelant les résultats du cours, que peut-on dire des distances MM′ et MF ? du triangle MM′F ? de la droite Δ pour ce triangle ? du triangle TFM′ ? Démontrer que U appartient à l'axe (Oy).

3. Soit A un point extérieur à $\mathscr{P}$. En utilisant les remarques précédentes, indiquer une construction à la règle et au compas des deux tangentes à $\mathscr{P}$ issues de A.
4. Montrer qu'une droite Δ', telle que la projection orthogonale de F sur Δ' appartienne à l'axe $(\mathrm{O}y)$ est tangente à $\mathscr{P}$.
5. **a.** Soit un triangle ABC non rectangle et extérieur à $\mathscr{P}$, tel que ses trois côtés soient tangents à $\mathscr{P}$.

   Démontrer que A, B, C, F sont cocycliques (on pourra utiliser la partie A).

   Démontrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à D.

   b. Indiquer la construction du triangle ABC, connaissant les projections orthogonales I, J, K de F sur les côtés (BC), (AC), (AB) (ces trois points étant donnés sur l'axe $(\mathrm{O}y)$.

Les questions 1, 2, 3, 4 de la partie B sont indépendantes de la partie A.