Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Lille [1] septembre 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - (1 - \mathrm{i})z^2 - (2 - 2\mathrm{i})z + 8 = 0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle a.
On notera b et c les deux autres solutions.

2. Soient A, B, C les images respectives, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, des nombres complexes a, b, c.
Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant les deux hypothèses :
(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs,
(2) pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers zéro et vérifie les deux hypothèses précédentes.
2. **a.** Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de φ.

b. En remarquant que l'hypothèse (2) se traduit par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \varphi(u_n)$$

démontrer par récurrence que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \frac{u_0}{1+nu_0}.$$

3. On rappelle que u_0 est un réel strictement positif.

a. Sans calculer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0}\,\mathrm{d}x$, démontrer que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{u_0}{1+nu_0} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0}\,\mathrm{d}x.$$

b. Calculer $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0}\,\mathrm{d}x$.

1.

c. Calculer $I_0 + I_1 + \cdots + I_n$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k$.

4. **a.** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(u_0 + u_1 + \cdots + u_{,,n}\right) = +\infty$ c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} I_k\right) = +\infty$.

b. Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \quad \text{c'est-à-dire de } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. $\left(\text{O},\,\vec{\imath}\right)$ est l'axe des abscisses et $\left(\text{O},\,\vec{\jmath}\right)$ l'axe des ordonnées.

On note A le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$ et (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

Partie A

1. Soit B le point de coordonnées $(-1\,;\,+1)$ et H, K, deux points de l'axe des abscisses. Démontrer l'équivalence :

$$\overrightarrow{\text{BH}} \cdot \overrightarrow{\text{BK}} = 0 \iff -\overline{\text{BH}} \cdot \overline{\text{AK}} = -1.$$

2. Soit un réel a et soit (D) la droite passant par A et de coefficient directeur a.
   a. Former une équation cartésienne de (D) et discuter, suivant la valeur de a, le nombre de points communs à (D) et (Γ).
   b. On suppose a tel que (D) coupe (Γ) en deux points M_1 et M_2. On projette orthogonalement M_1 et M_2 respectivement en I_1 et I_2 sur l'axe des abscisses. Démontrer que

$$\overline{\text{A}I_1} \cdot \overline{\text{A}I_1} = 1.$$

3. Soit M un point de (Γ), distinct de O. On projette orthogonalement M en I sur l'axe des abscisses et en J sur l'axe des ordonnées. Démontrer que la droite passant par I et orthogonale à (IJ) coupe l'axe des ordonnées en un point fixe Q (indépendant de la position de M sur (Γ)).
4. Soit, sur l'axe des abscisses, un point I dont l'abscisse est distincte de 0 et -1.
   a. Déduire de la 3[e] question une construction géométrique du point M de (Γ) situé sur la perpendiculaire en I à l'axe des abscisses.
   b. Déduire ensuite du 1. et du 2. b. une construction géométrique de l'intersection M′ de (Γ) avec la droite (AM).

Partie B

1. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right).$$

Étudier les variations de f et construire $(\mathscr{C})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations cartésiennes respectives : $y = -2x$, $x = 0$, $x = 1$.

2. Soit a un réel positif et soit (D) la droite passant par A et de coefficient directeur a.
La droite (D) et la parabole (Γ) ont en commun les points $M_1\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ et $M_2\left(x_2\ ;\ y_2\right)$. On suppose $x_1 \leqslant x_2$.
Soit P le point tel que $\overrightarrow{\text{AP}} = \overrightarrow{M_1M_2}$.
   a. Calculer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de P en fonction de a.
   Montrer que $y = f(x+1)$ où f est la fonction définie au 1.
   b. Soit (E) la courbe décrite par P lorsque le réel a décrit $\mathbb{R}_+$. Montrer que (E) se déduit de $(\mathcal{C})$ grâce à une transformation simple que l'on précisera.