

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille¹ septembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - (1 - i)z^2 - (2 - 2i)z + 8 = 0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle a .

On notera b et c les deux autres solutions.

2. Soient A, B, C les images respectives, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, des nombres complexes a, b, c .

Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2

5 points

On considère les suites de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{N} et vérifiant les deux hypothèses :

(1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs,

(2) pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers zéro et vérifie les deux hypothèses précédentes.

2. a. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de φ .

b. En remarquant que l'hypothèse (2) se traduit par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \varphi(u_n)$$

démontrer par récurrence que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{u_0}{1 + nu_0}.$$

3. On rappelle que u_0 est un réel strictement positif.

a. Sans calculer l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0} dx$, démontrer que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{u_0}{1+nu_0} \geq \int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0} dx.$$

b. Calculer $I_n = \int_n^{n+1} \frac{u_0}{1+xu_0} dx$.

c. Calculer $I_0 + I_1 + \dots + I_n$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n I_k$.

4. a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = +\infty$ c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n I_k \right) = +\infty$.

b. Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \quad \text{c'est-à-dire de } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

PROBLÈME

11 points

Dans tout le problème, le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(O, \vec{i}) est l'axe des abscisses et (O, \vec{j}) l'axe des ordonnées.

On note A le point de coordonnées $(-1; 0)$ et (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

Partie A

1. Soit B le point de coordonnées $(-1; +1)$ et H, K, deux points de l'axe des abscisses. Démontrer l'équivalence :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BK} = 0 \iff -\overline{BH} \cdot \overline{AK} = -1.$$

2. Soit un réel a et soit (D) la droite passant par A et de coefficient directeur a .

a. Former une équation cartésienne de (D) et discuter, suivant la valeur de a , le nombre de points communs à (D) et (Γ) .

b. On suppose a tel que (D) coupe (Γ) en deux points M_1 et M_2 . On projette orthogonalement M_1 et M_2 respectivement en I_1 et I_2 sur l'axe des abscisses. Démontrer que

$$\overline{AI_1} \cdot \overline{AI_2} = 1.$$

3. Soit M un point de (Γ) , distinct de O. On projette orthogonalement M en I sur l'axe des abscisses et en J sur l'axe des ordonnées. Démontrer que la droite passant par I et orthogonale à (IJ) coupe l'axe des ordonnées en un point fixe Q (indépendant de la position de M sur (Γ)).

4. Soit, sur l'axe des abscisses, un point I dont l'abscisse est distincte de 0 et -1 .

- a. Dédire de la 3^e question une construction géométrique du point M de (Γ) situé sur la perpendiculaire en I à l'axe des abscisses.
- b. Dédire ensuite du 1. et du 2. b. une construction géométrique de l'intersection M' de (Γ) avec la droite (AM).

Partie B

1. Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = x\left(\sqrt{4+x^2}-2\right).$$

Étudier les variations de f et construire (\mathcal{C}). Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations cartésiennes respectives : $y = -2x$, $x = 0$, $x = 1$.

2. Soit a un réel positif et soit (D) la droite passant par A et de coefficient directeur a .

La droite (D) et la parabole (Γ) ont en commun les points $M_1(x_1; y_1)$ et

$M_2(x_2; y_2)$. On suppose $x_1 \leq x_2$.

Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

- a. Calculer les coordonnées $(x; y)$ de P en fonction de a .
Montrer que $y = f(x+1)$ où f est la fonction définie au 1.
- b. Soit (E) la courbe décrite par P lorsque le réel a décrit \mathbb{R}_+ . Montrer que (E) se déduit de (\mathcal{C}) grâce à une transformation simple que l'on précisera.