Baccalauréat série mathématiques
Lille juin 1947

I. 1er sujet

Établir la dérivée de $\sin x$, x étant exprimé en radians.

I. 2e sujet

Trouver en vraie grandeur l'angle de deux plans donnés par leurs traces (Géométrie descriptive).

I. 3e sujet

Condition d'équilibre d'un point matériel assujetti à rester sur un plan fixe, avec ou sans frottement.

II.

On considère un cercle (I) de centre I, de rayon R et l'inversion de pôle I et de puissance R^2.

1. Quel est l'inverse d'un cercle C, orthogonal au cercle de centre I de rayon R ?
2. On considère un cercle C_1 fixe tangent au cercle (I) en un point O et les cercles (C) orthogonaux à (I) et tangents à C_1.

   Montrer que les cercles C sont tangents à une deuxième courbe C_2, qui est, en général, un cercle.

   Soient M_1 et M_2 les points de contact d'un cercle (C) avec C_1 et C_2. Que peut-on dire de la droite M_1M_2 quand le cercle (C) varie ?

   Comment faut-il choisir C_1 pour que C_2 soit une droite ?

   On désigne par O le point de contact des cercles (C_1) et (I), par OO' le diamètre du cercle (I) orienté de O vers O', par R, R_1, R_2, les *abscisses* des centres I, C_1, C_2 des cercles (I), (C_1), (C_2).

   Quelle relation y a-t-il entre R, R_1, R_2 ?
3. Déterminer les cercles C_1 et C_2 de telle manière que la somme des carrés des inverses de leurs rayons soit égale à $\dfrac{1}{a^2}$, a étant une longueur donnée.

   À toute valeur de a inférieure à une certaine limite correspond un couple unique de cercles C_1 et C_2 se correspondent.

   Que devient ce couple dans le cas $a = \dfrac{R}{2}$?
4. Dans le cas particulier $a = \dfrac{R}{2}$, déterminer le lieu du centre du cercle variable C, tangent à C_1 et C_2 ?

SESSION SPÉCIALE

I. 1er sujet

Exposer une méthode de résolution des équations trigonométriques de la forme

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Discussion.

I. 2e sujet

Points conjugués par rapport à un cercle.

Polaire d'un point par rapport à un cercle.

I. 3e sujet

Mouvement curviligne : équation horaire ; vecteur vitesse.

II.

1. x désignant une longueur variable et a une longueur positive fixe, étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{2x^2 + a^2}{2\left(a^2 - x^2\right)}$$

et construire la courbe représentative.

2. On considère un triangle ABC dans lequel a, b, c désignent les longueurs des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C, h_a la hauteur issue de A, r le rayon du cercle inscrit, I le centre du cercle inscrit, J, K, L les centres des cercles exinscrits au triangle ABC respectivement dans les angles A, B, C.

Démontrer que, pour que $h_a = 3r$, il faut et il suffit que les côtés c, a, b soient en progression arithmétique dont a est le côté moyen.

(On supposera dans cette question $2b > c$).

Soit x la raison positive de cette progression.

Démontrer les relations

$$\cos \mathrm{A} = \frac{2x^2 + a^2}{2\left(a^2 - x^2\right)}, \quad \cos \mathrm{B} = \frac{a - 4x}{2(a - x)}, \quad \cos \mathrm{C} = \frac{a + 4x}{2(a + x)}.$$

En déduire les variations de cos A, cos B, cos C et celles de A, B, C quand x qui est la variable varie dans l'intervalle convenable.

Montrer aussi que si r_a est le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A on a $h_a = r_a$.