∽ Baccalauréat C Lille juin 1966 ∾
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit la fonction définie par

$$y = f(x) = \sin x(7 + \cos 2x).$$

1. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$.

2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.

3. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction sur le segment $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. En utilisant les résultats des questions 1. et 2., construire le graphe correspondant au segment $[-\pi\,;\,+\pi]$.

EXERCICE 1

Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct Ox, Oy on prend les points A(R; 0) et B(−R ; 0) (R : longueur donnée).
À tout point M du plan on associe le point M′ défini par les conditions

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{module de } \overrightarrow{\text{BM}'} & = & \text{module de } \overrightarrow{\text{AM}},\\ \left(\overrightarrow{\text{AM}},\,\overrightarrow{\text{BM}'}\right) & = & \dfrac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi.\end{array}\right.$$

On désigne par P le milieu de MM′.

Partie A

1. Préciser la nature géométrique de l'application (T) transformant M en M′ et celle de l'application (T′) transformant M en P.
Quel est le point double de (T) ?

2. Connaissant les coordonnées $(x\,;\,y)$ de M, donner les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ de M′ et les coordonnées $(X\,;\,Y)$ de P.

3. M décrivant la droite d'équation $x = 2\text{R}$, préciser le lieu de M′, le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM′.

Partie B

Dans tout ce qui suit, on suppose que M décrive le cercle de centre A et de rayon R.

1. Préciser le lieu de M′, le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM′.

2. Écrire les équations dans le repère $\overrightarrow{\text{O}x}$, $\overrightarrow{\text{O}y}$ du lieu de M, du lieu de M′, du lieu de P et de l'enveloppe de la droite MM′.
Montrer que l'enveloppe de MM′ est bitangente au lieu de M, au lieu de M′ et au lieu de P.

3. On désigne par α l'angle polaire $\left(\overrightarrow{\text{A}x},\,\overrightarrow{\text{AM}}\right)$ défini à $2k\pi$ près. Donner, en fonction de α et de R, les coordonnées de M, de M′ et de P.
R et α étant donnés, former l'équation cartésienne de la droite MM′. Calculer le carré, z, de la distance de l'origine O à la droite MM′.
Exprimer z en fonction de $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = t$.

4. Étudier les variations et le graphe de la fonction

$$z = \frac{2\mathrm{R}^2(1+t)^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+4t+5\right)},$$

R désignant une longueur donnée et t variant de $-\infty$ à $+\infty$.
À cet effet, on se bornera à effectuer le changement de variable défini par $\theta = t+1$ et à étudier la fonction $z(\theta)$ ainsi obtenue.

N. B. - Les différentes questions sont, dans une large mesure, indépendantes.
Par « lieu », il faut entendre « ensemble de points ».