Baccalauréat C Lille juin 1962

EXERCICE

x étant la mesure d'un arc en radians, calculer la dérivée de la fonction :

$$y = 2\sin^2 x(1-\cos x)$$

et étudier le signe de cette dérivée lorsque x varie entre $-\pi$ et $+\pi$.

PROBLÈME

On donne un système de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$; on donne en outre la droite (D) parallèle à $x'Ox$ et rencontrant Oy en B, tel que $\overline{OB} = 2R$ (R est une longueur positive donnée).
On appelle (M) un cercle tangent à la fois à $x'Ox$ et à (D) et dont le centre M n'est pas sur $y'Oy$; on appelle (P) le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4R^2$: on dit que le cercle (P) est le *cercle associé* au cercle (M). On notera P le centre du cercle (P).

1. Montrer que lorsque (M) varie, son cercle associé (P) reste tangent à la fois à $x'Ox$ et à un cercle fixe (Γ) que l'on précisera. En déduire :
   - **a.** Une construction simple du cercle (P) associé à un cercle (M) donné ;
   - **b.** Les cercles (M) qui coïncident avec leur cercle associé ;
   - **c.** Le lieu du centre P du cercle (P) lorsque (M) varie.
2. Quel est le lieu des points communs, lorsqu'ils existent, à une cercle (M) et à son cercle associé ?

   Construire les cercles (M) qui sont tangents à leur associé ; construire leurs cercles associés.
3. Quel est le lieu du pied H de la polaire de O par rapport au cercle (P) lorsque le cercle (M) varie ? En déduire que cette polaire passe par un point fixe que l'on précisera.
4. On désigne par (O) le cercle de centre O et de rayon $2R$.

   Montrer qu'il existe un point K ayant même puissance par rapport au cercle (O), au cercle (Γ), au cercle (M) et à son cercle associé (P).

   Montrer que, lorsque (M) varie, la perpendiculaire en K à l'axe radical des cercles (M) et (P) passe par un point fixe F.

   À quelle courbe cet axe radical reste-t-il tangent ?

Note : par « lieu géométrique » ou « lieu » il faut entendre « ensemble de points ».