Durée : 4 heures

Baccalauréat Lille juin 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On donne le nombre complexe

$$4\sqrt{2}(-1+\text{i}).$$

1. Donner le module et l'argument de ce nombre.
2. Donner, sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne, les racines cubiques de ce nombre.

EXERCICE 2

On considère la courbe (H) d'équation

$$xy = 1,$$

rapportée à deux axes orthonormés Ox, Oy.
Soit M_1 et M_2 les points de (H) d'abscisses respectives x_1 et x_2, telles que $0 < x_1 < x_2$.
Les parallèles aux axes Ox et Oy issues de M_1 et M_2 forment le rectangle $\text{M}_1\text{IM}_2\text{J}$, de centre P ; les tangentes (D_1) et (D_2) à la courbe (H) en M_1 et M_2 se coupent en Q.

1. Déterminer les équations de (D_1) et (D_2) et les coordonnées de Q.
   Établir que les points O, Q, I, J sont alignés et qu'ils forment une division harmonique.
2. Évaluer, en fonction de x_1 et x_2 l'aire S (positive) comprise entre la corde M_1M_2 et l'arc M_1M_2 de la courbe (H).
   On suppose que M_1 et M_2 décrivent la portion de (H) située dans le demi-plan $x > 0$, de telle façon que $\dfrac{x_2}{x_1} = t$ demeure constant et supérieur à 1.
   Montrer que S est constante, ainsi que le produit des coordonnées de Q.
   Quel est l'ensemble des points Q ?
3. Calculer la dérivée de la fonction f telle que

   $$S = f(t).$$

   Calculer la limite de $u = S$ quand $t \to +\infty$, puis celle du produit $S = u \times t$.
   En déduire la variation de S en fonction de t quand $t \geqslant 1$ (il n'est pas demandé de graphe) et montrer que, si S est constant, t est constant,
4. t demeurant constant, évaluer les rapports

   $$\frac{\overline{\text{OP}}}{\overline{\text{OQ}}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\text{PQ}}}{\overline{\text{PI}}}.$$

   Quel est l'ensemble des points P ?
   Prouver que M_1M_2 est la tangente en P à cet ensemble et que les aires des triangles IM_1M_2, QM_1M_2 et OM_1M_2 sont constantes.