∽ Baccalauréat C Lille juin 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

1. Déterminer deux constantes réelles, A et k, telles que $f x) = A\cos(x - k)$.
2. Démontrer que, dans l'intervalle $0 \leqslant x < 2\pi$, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux racines, x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$), que l'on déterminera.
3. Ces deux racines, x_1 et x_2, sont respectivement les arguments de deux nombres complexes, z_1 et z_2 de module 1.

   Calculer le module et l'argument de chacun des deux nombres $q = \dfrac{z_2}{z_1}$ et $s = z_1 + z_2$.

EXERCICE 2

1. Trouver tous les entiers relatifs u et v tels que

$$3u - 5v = 0.$$

2. Trouver tous les entiers relatifs x et y tels que

$$3x - 5y = 18.$$

PROBLÈME

Le repère plan, d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, est orthonormé.
On appelle C et C′ les points de l'axe $y'y$ définis par $\overline{\mathrm{OC}} = 2$ et $\overline{\mathrm{OC}'} = -1$; (C) et (C′) désignent respectivement les cercles de centres C et C′ et tangents en O à l'axe $x'\mathrm{O}x$.
P est un point variable de l'axe $x'x$ et défini par son abscisse, $\overline{\mathrm{O}P} = \lambda$. (On suppose $\lambda \neq 0$.)
On construit les tangentes (autres que PO) issues du point P aux cercles (C) et (C′) et l'on désigne respectivement par M et M' leurs points de contact.

1. Écrire les équations des cercles (C) et (C′).

   Construire le cercle (P) de centre P et orthogonal aux cercles (C) et (C′) ; écrire son équation en fonction du paramètre λ.

   En déduire que les coordonnées des points M et M' sont :

$$\text{pour } M \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{8\lambda}{\lambda^2+4},\\ y & = & \dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2+4}, \end{array}\right. \qquad \text{pour } M' \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+1},\\ y & = & \dfrac{-2\lambda^2}{\lambda^2+1}. \end{array}\right.$$

2. **a.** Démontrer analytiquement que, lorsque λ varie, la droite MM' passe par un point fixe, S, de l'axe $y'y$.
   b. Retrouver géométriquement le résultat précédent en transformant la figure dans l'inversion de pôle O et de puissance 16.
3. **a.** Écrire les équations des droites CM et C$'M'$. Trouver les valeurs de λ pour lesquelles ces droites sont parallèles. Lorsque ces droites sont sécantes, on désigne par Q leur point de rencontre ; calculer en fonction de λ les coordonnées de ce point.
   En déduire que l'équation de l'ensemble des points Q, lorsque λ varie, est
$$8y^2 - x^2 - 8y = 0.$$
   b. Démontrer que cet ensemble est une conique, dont on reconnaîtra d'abord le centre et dont on déterminera la nature.
4. Déterminer le point P de façon que les tangentes PM et PM' soient rectangulaires.

N. B. - Le résultat final de la question 1 étant admis, les questions 2, 3 et 4 peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
Dans les questions 2 et 3, les deux parties a. et b. sont indépendantes l'une de l'autre.