

∞ Baccalauréat Lille septembre 1967 ∞
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

1. Établir la relation

$$\frac{2 \cos 2a + 1}{2 \cos a + 1} = 2 \cos a - 1.$$

Cette relation est-elle valable quel que soit a ?

2. Appliquer cette relation au calcul de

$$P_n = (2 \cos a - 1) \left(2 \cos \frac{a}{2} - 1\right) \dots \left(2 \cos \frac{a}{2^n} - 1\right)$$

où n désigne un entier arithmétique et où a est tel que

$$0 < a < \frac{\pi}{3}.$$

II.

Soit, dans un plan, une droite fixe, (D).

À tout point M du plan on fait correspondre (quand c'est possible) le point M' tel que

$$\begin{cases} \overline{MM'} \text{ soit perpendiculaire à (D),} \\ \overline{HM} \cdot \overline{HM'} = k, \end{cases}$$

où k représente un nombre réel non nul et H la projection orthogonale de M sur (D).

1. Pour quels points du plan la transformation est-elle définie?
2. Est-ce que cette transformation possède des points doubles?
3. Est-ce un déplacement?

II.

On donne un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle (C) dont le centre est le point A de coordonnées $(x = 1, y = 1)$ et dont le rayon est l'unité de longueur ($R = 1$).

P désigne un point variable de l'axe $x'Ox$ et Q un point variable de $y'Oy$. On pose $\overline{OP} = u$ et $\overline{OQ} = v$ (u et v sont tous deux différents de zéro).

1. Former l'équation de la droite PQ et calculer la distance du point A à cette droite en fonction des paramètres u et v .

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite PQ soit tangente au cercle (C) est

$$(1) \quad uv - 2(u + v) + 2 = 0.$$

On suppose, dans toute la suite, que u et v vérifient la relation (1).

2. On désigne par M le milieu du segment de droite PQ et par F le symétrique de O par rapport à A.
Calculer les longueurs OM et FM en fonction de u seulement. On montrera que ces longueurs peuvent s'exprimer par des fractions rationnelles de u .
Calculer $MO - MF$.
3. Calculer le périmètre du triangle OPQ en fonction de u .
4. Étudier la variation de la fonction f de la variable réelle u définie, pour $u \neq 2$, par

$$z = f(u) = |u| + 2 \left| \frac{u-1}{u-2} \right| + \left| \frac{u^2 - 2u + 2}{u-2} \right|.$$

Construire le graphique de f , en utilisant un repère orthonormé d'axes Ou , Oz , l'unité de longueur sur chacun des axes étant le centimètre.

5. Étant donné deux droites, P_0Q_0 et P_1Q_1 de la famille étudiée, trouver la relation entre u_0 et u_1 nécessaire et suffisante pour que les quatre points P_0 , Q_0 , P_1 et Q_1 soient sur un même cercle. Un point P_0 étant donné sur $x'x$, combien lui correspond-il de droites P_1Q_1 dans la disposition précédente?