**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Limoges juin 1970

**EXERCICE 1**

On considère la fonction $f_m$ définie pour $x$ réel par

$$f_m(x) = \mathrm{e}^x - mx,$$

$m$ étant un paramètre réel positif. Soit $(C_m)$ le graphique de $f_m$ par rapport à un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de la fonction $f_m$ ; montrer que, quel que soit $m$, la courbe $(C_m)$ admet une asymptote, dont on déterminera l'équation.
   Déterminer les coordonnées du point $M$ correspondant au minimum de la fonction $f_m$
2. Trouver, quand $m$ varie, l'équation de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ et construire l'ensemble $(\Gamma)$.

**EXERCICE 2**

On donne les nombres réels $\theta$ et $\varphi$ tels que

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi.$$

On considère les nombres complexes

$$z_1 = \cos 2\theta + \mathrm{i} \sin 2\theta \quad \text{et} \quad z_2 = \cos 2\varphi + \mathrm{i} \sin 2\varphi.$$

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $(1 - z_1)$ et $(1 + z_2)$ ; en déduire le module et l'argument du nombre complexe

$$Z = \frac{1 - z_1}{1 + z_2}.$$

**EXERCICE 3**

Soit un repère orthonormé d'axes O$x$, O$y$ et $a$ un nombre réel donné strictement positif.
On désigne par (D) et (D$'$) les parallèles à O$y$ menées respectivement par les points A$(2a\ ;\ 0)$ et A$'(a\ ;\ 0)$.
Soit $T$ la transformation ponctuelle qui, au point $m(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M(X\ ;\ Y)$ défini de la façon suivante :
si la droite O$m$ coupe (D) en B, $M$ est conjugué harmonique de $m$ par rapport à O et B ;
si $m$ est sur O$y$, $M$ est symétrique de $m$ par rapport à O.

1. **a.** Quel est l'ensemble des points du plan n'ayant pas de transformés par $T$ ?
   Quelle est la figure transformée d'une droite passant par O ; d'une droite parallèle à (D) ?

**b.** Montrer que, si $x \neq a$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \dfrac{ax}{x-a} \\ Y & = & \dfrac{ay}{x-a} \end{array}\right.$$

Quelles sont les coordonnées de $m$ en fonction de celles de $M$ ?

Déterminer les points invariants dans la transformation.

**2.** **a.** Montrer que la figure transformée d'une droite ($\delta$) coupant O$y$ et (D) respectivement en P et Q est une droite ($\Delta$) ; préciser les points où ($\Delta$) coupe O$y$ et (D). En déduire une construction de ($\Delta$), connaissant ($\delta$), puis la construction du transformé $M$ d'un point $m$ de ($\delta$).

**b.** Soit $m_1, m_2$ et $m_3$ trois points de ($\delta$) tels que $m_3$ soit le milieu du segment $m_1 m_2$ ; soit $M_1, M_2$ et $M_3$ leurs transformés sur ($\Delta$) ; montrer que le point d'intersection, I, de ($\Delta$) et de (D$'$) est conjugué harmonique de $M_3$ par rapport à $M_1$ et $M_2$.

**3.** **a.** En utilisant les relations trouvées dans la question 1. b. écrire l'équation de la conique ($\Gamma$) transformée du cercle ($C$) de centre O et de rayon $R$.

**b.** Exprimer en fonction de $x$ et $y$ le rapport des distances de $M$ à O et à (D$'$), soit $\dfrac{M\text{O}}{M\text{H}}$.

En déduire que le point O et la droite (D$'$) sont respectivement foyer et directrice associée pour la conique ($\Gamma$).

**c.** Construire la courbe ($\Gamma$) dans les trois cas particuliers suivants : $R = a$; $R = \dfrac{a}{2}$; $R = 2a$.

**4.** Soit la parabole ($\Pi$) d'équation $y^2 = 4a(x-a)$.

La construire en déterminant son foyer et sa directrice, puis chercher l'équation de la courbe transformée, ($\Pi'$).

Montrer que la tangente en un point $m$ de ($\Pi$) et la tangente à ($\Pi'$) au point $M$ correspondant ont un point commun sur la droite (D).