Baccalauréat C Limoges juin 1973

EXERCICE 1

Déterminer le reste de la division par 5 de 8^{1974}.

EXERCICE 2

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \text{Log}\,\frac{x+11}{x-1}$$

Log désigne le logarithme népérien

1. Étudier ses variations, tracer sa courbe représentative.
2. Résoudre l'équation $f(x) = a$ où a est un réel donné.

EXERCICE 2

Soit P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; m et M sont deux points de ce plan de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(X\ ;\ Y)$; f est une application du plan dans lui-même qui au point m associe le point M ; l'application est définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l} X &=& \dfrac{x}{2} + ay\\ Y &=& bx + \dfrac{y}{2}\end{array}\right.$$

(a et b étant deux nombres réels donnés).

1. π étant le plan vectoriel associé à P donner la matrice A de l'application linéaire qui au vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le vecteur de coordonnées $(X\ ;\ Y)$.

   Déterminer suivant les valeurs de a et b le noyau et l'image de cette application linéaire. À quelle condition portant sur a et b est-elle bijective ?

   Quels sont les points invariants de l'application f ?

   Si f est bijective déterminer la bijection réciproque.
2.
   a. Pour quelles valeurs de a et b l'application f est-elle une isométrie ? Préciser la nature des isométries trouvées.

   b. On considère la matrice A

   $$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

   Déterminer $A \times A = A^2$, puis A^3 ; en déduire A^4, A^5, A^6, puis A^n, (n entier naturel).

   c. L'application f est déterminée par

   $$\left\{\begin{array}{l c l} X &=& \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\\ Y &=& \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2}\end{array}\right.$$

   Si le point m décrit la droite (d) d'équation $3x + 2y - 6 = 0$, construire la courbe décrite par M (une figure précise est demandée).

3. On prend maintenant $a = -b = \lambda$.

a. Montrer que f est une similitude. Quel est son centre ? Calculer en fonction de λ le rapport k de cette similitude.

Construire la courbe représentant les variations de k lorsque λ décrit l'ensemble des réels,

b. (d) est une droite passant par le point fixe A(0 ; 1) ; montrer que sa transformée (D) par la similitude correspondant à $\lambda = 1$ passe par un point fixe A$'$ que l'on déterminera.

À quelle courbe appartient le point d'intersection I de (d) et (D) lorsque (d) varie en passant par A ?

4. Dans cette question on choisit $a = 1$ et $b = 2$; m décrit la courbe d'équation $2x^2 - y^2 = 1$.

Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer la courbe décrite par le point M transformé de m par f.

N. B. Les questions 2, 3, 4 sont indépendantes les unes des autres.