Durée : 4 heures

Baccalauréat C Limoges septembre 1971

EXERCICE 1

Dans le corps des nombres réels, muni des deux lois addition et multiplication, on considère la loi $\star$ définie par

$$a \star b = ab - 2(a+b) + 6.$$

1. Vérifier que la loi $\star$ est commutative et associative. Montrer qu'il existe un élément α, tel que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \star \alpha = \alpha \star a = \alpha.$$

   Montrer qu'il existe un élément neutre e, pour la loi $\star$.
2. Le nombre réel a étant donné, déterminer, lorsqu'il existe, son inverse pour la loi $\star$; déterminer, en particulier, les nombres égaux à leur inverse.

EXERCICE 2

1. Démontrer que $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est divisible par 11 pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Déterminer toutes les valeurs de a appartenant à $\mathbb{Z}$ telles que $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$ soit divisible par 11 pour tout n de $\mathbb{N}$.

PROBLÈME

Partie A

Dans le plan Pl on considère deux cercles distincts égaux (C) et (C') de rayon 1, tangents en O et de centres respectifs ω et ω'. Soit la transformation ponctuelle T qui à un point M de P (M n'étant pas pris sur la tangente en O aux deux cercles) associe M', point d'intersection des polaires de M par rapport aux deux cercles.

1. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé ?
2. Montrer que lorsque M a un transformé M' les droites OM et OM' sont perpendiculaires.
3. Quelle est la transformation réciproque de T ?

Partie B

Les hypothèses étant les mêmes que dans la partie A, dans toute la suite du problème on rapporte le plan (P) à un repère orthonormé d'origine O, l'axe des x étant porté par la droite ωOω' orientée de façon que

$$\overline{\mathrm{O}\omega} = +1.$$

1. Montrer que les coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point M sont liées aux coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point M' transformé par

$$x' + x = 0 \quad \text{et} \quad yy' = x^2.$$

2. À l'aide des formules de la question précédente, retrouver les propriétés établies dans la partie A.
3. Trouver l'équation de la courbe (Γ) transformée par T du cercle (C) [on pourra l'écrire sous la forme $y^2 = f(x)$]. Construire cette courbe en étudiant l'une des fonctions qui à x associe y ; préciser la tangente en O.

   Montrer que l'on peut construire géométriquement d'une manière très simple, sans utiliser les constructions de polaire, tout point M' de (Γ) à partir du point M correspondant de (C).
4. Discuter suivant la valeur de m la nature de la transformée par T de la droite (D_m) d'équation

$$x + y + m = 0.$$

   Construire en particulier la transformée de la droite (D_1) obtenue pour $m = 1$.