∽ Baccalauréat C Limoges juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère la loi de composition, notée $\star$, telle que

$$\forall (a\,;\,b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \star b = a + b + a.b.$$

Les signes + et × désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que c'est une loi interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?
2. On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par

$$a^{(1)} = a \quad \text{et} \quad a^{(n)} = a(n-1) \star a.$$

Exprimer $a^{()}$, $a^{()}$ et $a^{()}$, en fonction de a, et en déduire l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et de n.

EXERCICE 2

On donne dans un plan orienté trois droites (D_1), (D_2) et (D_3) passant par O et telles que

$$(D_1,\ D_2) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad (D_2,\ D_3) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Soit $\mathscr{S}_{(D_1)}$, $\mathscr{S}_{(D_2)}$ et $\mathscr{S}_{(D_3)}$ les symétries par rapport aux droites (D_1), (D_2) et (D_3) [ou symétries axiales d'axes respectifs (D_1) (D_2) et (D_3)].

1. Construire le transformé d'un point M du plan par la transformation T définie par

$$T = \mathscr{S}_{(D_3)} \circ \mathscr{S}_{(D_2)} \circ \mathscr{S}_{(D_1)}$$

Quelle est la nature de cette transformation T ?

2. On considère alors la transformation T' définie par $T' = \mathscr{S}_{(D_1)} \circ T$.
Quelle est la nature de cette transformation T' ? Ce produit est-il commutatif ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. Log x désigne le logarithme népérien de x. Sa base est e.

1. On considère l'équation différentielle

$$xy' \operatorname{Log} x + y - x = 0,$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et y' sa dérivée par rapport à x. Trouver toutes les solutions de la forme $y = \dfrac{P(X)}{\operatorname{Log} x}$, où P désigne une fonction de x, que l'on déterminera. Préciser, parmi ces solutions, celle dont la courbe représentative passe par le point, S, de coordonnées (e ; e).

2. Étudier la fonction qui à x fait correspondre

$$y = \frac{x}{\text{Log}\,x}.$$

On tracera la courbe représentative (Γ) par rapport aux axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

On étudiera, en particulier, les branches infinies, les points remarquables et les tangentes en ces points.

3. On considère un point M_0 de (Γ) d'abscisse x_0. Déterminer les points M de (Γ) où les tangentes à (Γ) sont perpendiculaires à la tangente à (Γ) en M_0.

Discuter l'existence et le nombre de ces points M suivant les valeurs de x_0. (Il pourra être intéressant, afin d'alléger les écritures, de poser $u = \text{Log}\,x$ et $u_0 = \text{Log}\,x_0$.)

Lorsque x_0 est choisi dans un domaine précisé lors de la discussion précédente, il existe deux points M répondant à la question. Ils seront notés M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2.

Montrer que

$$\text{Log}\,x_1 + \text{Log}\,x_2 = Log\text{Log}\,x_1.\text{Log}\,x_{2.}$$

En déduire que

$$\text{tg}\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{O}M_1}\right) + \text{tg}\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{O}M_2}\right) = 1.$$

4. Les tangentes en M_1 et M_2 à (Γ) coupent l'axe $x'\text{O}x$ respectivement en P_1 et P_2 d'abscisses x'_1 et x'_2.

Montrer que $x'_1.x'_2 = x_1.x_2$.

On appelle m_2 la projection orthogonale sur $x'\text{O}x$ de M_2.

Démontrer que l'axe radical du cercle de diamètre M_1m_2 et du cercle circonscrit à $M_2P_1P_2$ passe par un point fixe lorsque M_0 varie sur (Γ) dans les conditions précisées à la question 3.