Durée : 4 heures

Baccalauréat C Limoges juin 1972

EXERCICE 1

L'espace $\overrightarrow{E_3}$ est un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et $\overrightarrow{E_2}$ est un espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}' = \left(\vec{\imath}', \vec{\jmath}'\right)$.

On considère l'application linéaire, f, de $\overrightarrow{E_3}$ vers $\overrightarrow{E_2}$, qui associe à tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{E_3}$, ayant pour composantes scalaires $(x ; y ; z)$, le vecteur $f\left(\vec{u}\right) = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}'$, les composantes x' et y' étant déterminées par

$$x' = 2x - y - z \quad \text{et} \quad y' = -x + 2y + z.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

EXERCICE 2

On considère la fonction f, définie, pour x réel positif, par

$$f(x) = x[x - \mathrm{E}(x)],$$

en désignant par $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Dans le plan affine, rapporté à un repère orthonormé, construire le graphique de f pour $x \in [0 ; 3[$.
2. Soit k un entier positif; donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in [k ; k+1[$, puis calculer $u_k = \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer $(u_{k+1} - u_k)$; en déduire que la suite finie $\{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est une suite arithmétique, dont on donnera la raison et le premier terme.
   Calculer $\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$, n étant un entier positif.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ (f(x) & = & x(1 - \mathrm{Log}\, x), \quad x > 0, \end{array}\right.$$

(où le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Déterminer, pour $x > 0$, la fonction dérivée, f'.
   La fonction f est-elle continue à droite pour $x = 0$, dérivable à droite en ce point ?
   Construire le graphique, $(\mathcal{C})$, de f par rapport à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ainsi $(\mathcal{C})$ aux points d'ordonnée nulle.
2. Calculer l'aire $A(x)$ du domaine plan limité par l'axe Ox, la courbe (C) et les parallèles à l'axe Oy d'abscisses respectives x et e. On définit ainsi une fonction A, qui, à $x > 0$, fait correspondre $A(x)$; trouver la limite A_0 de A quand x tend vers 0 ; déterminer $x > \mathrm{e}$, pour que $A(x)$ soit égal à A_0.

3. **a.** Vérifier que, pour tout x strictement positif, $f(x) - xf'(x) - x = 0$.
En déduire l'ordonnée du point, T, où la tangente à (C) en un point d'abscisse x coupe l'axe $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath}\right)$.

b. Vérifier que toute fonction, g_m, définie, pour $x > 0$, par

$$g_m(x) = mx - x\text{Log}\, x$$

(où m est une constante réelle), vérifie la relation

$$(1) \qquad g_m(x) - xg'_m(x) - x = 0.$$

Déterminer la fonction, g, qui vérifie la relation (1) et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

4. **a.** Soit (C_1) le graphique de la fonction g. Montrer que (C_1) est homothétique de (C) dans une homothétie de centre O, dont on déterminera le rapport.

b. Soit M un point de (C) et N le point de même abscisse sur (C_1) ; donner les coordonnées du point commun des tangentes en M et en N respectivement à (C) et à (C_1).