Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C juin 1974 Limoges ∾

EXERCICE 1

1. a désigne un entier naturel non nul donné.
   Démontrer que le nombre $A = a\left(a^2-1\right)$ est divisible par 6.
2. Plus généralement, démontrer que $A = a\left(a^{2n}-1\right)$ est divisible par 6. (n désigne un entier naturel quelconque).
   Application : Démontrer que les sommes :
   $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$
   et $S_n = a_1^{2n+1} + a_1^{2n+1} + + a_k^{2n+1}$
   dans lesquelles a_1, $a_2 \ldots a_k$ désignent des entiers naturels non nuls donnés, ont le même reste de division par 6.

EXERCICE 2

Dans le plan euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ on considère l'application qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1+\text{i})z+1.$$

Montrer que cette application est une similitude directe dont on déterminera le centre, l'angle et le rapport.
Quel est l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{\text{O}M}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{O}M'}\right\|$

PROBLÈME

Partie A

On donne la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\text{e}^x-1}{\text{e}^x+1}$$

1. Étudier cette fonction, tracer sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$; montrer que g est impaire.
2. Montrer que quels que soient les réels x et y,
$$g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}$$
3. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;\,1[$.
   Déterminer sa fonction réciproque et la dérivée de cette fonction.

Partie B

On considère une fonction f définie pour tout réel et vérifiant la propriété :

$$(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+ff(x)f(y)}\quad (1)$$

1. Montrer que s'il existe un réel c tel que $f(c) = 1$ ou $f(c) = -1$ la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
On suppose dans toute la suite du problème f non constante.

2. En écrivant $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, montrer que quel que soit le réel x on a :

$$-1 < f(x) < 1$$

et établir que $f(0) = 0$; en déduire que f est impaire.

3. Montrer par récurrence que pour tout réel x et pour tout entier strictement positif n :

$$\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$$

On pose $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)} = a$.
Calculer pour n entier naturel puis pour n entier relatif la valeur de $f(n)$ en fonction de a.
Calculer $f(x)$ en fonction de a pour $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.

Partie C

La relation (1) étant toujours satisfaite, on suppose de plus que f est dérivable en 0 et que sa dérivée en ce point est le nombre k défini par :

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

1. En étudiant $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, montrer que f est dérivable en tout point x et que

$$f'(x) = k\left[1 - f(x)^2\right].$$

Le nombre k peut-il être nul ?
Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur $\mathbb{R}$; montrer que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{k\left(1-y^2\right)}.$$

Calculer une primitive de $\dfrac{1}{1-x^2}$; en déduire f^{-1} puis f.