Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Limoges juin 1976 ∾

EXERCICE 1

Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 3, 4.
On tire deux boules simultanément et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

1. Quelle est la loi de probabilité de X?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X?

EXERCICE 2

1. Montrer que tout réel x différent de (-1) vérifie l'égalité :

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-x)^n}{1+x}$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Log}\,2-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

(Log signifiant logarithme népérien).

2. Montrer que pour tout entier naturel n différent de zéro et pour tout x élément de $[0\,;\,1]$ on a la double inégalité :

$$-x^n \leqslant \frac{(-x)^n}{1+x} \leqslant x^n.$$

En déduire les inégalités :

$$-\frac{1}{n+1}\leqslant \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la suite

$$u_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

PROBLÈME

Partie A

On considère dans le plan affine euclidien π rapporté à un repère orthonormé $\left(\omega,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ l'application affine g qui, à tout point H de coordonnées $(p\ ;\ q)$ associe le point H' de coordonnées $\left(p'\ ;\ q'\right)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p' &=& p\mathrm{Log}\,x-q\mathrm{Log}\,y\\ q' &=& p\mathrm{Log}\,y+q\mathrm{Log}\,x\end{array}\right.$$

x et y étant des paramètres réels strictement positifs, le symbole Log désignant le logarithme népérien.

1. Pour quelle valeur du couple $(x\ ;\ y)$, l'application g n'est-elle pas bijective sur π ?
2. Dans cette question, on considère les couples $(x\ ;\ y)$ comme les coordonnées d'un point M d'un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   a. Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit une homothétie.
   b. Déterminer l'ensemble des points M tels que g soit involutive.
   On trouvera deux points et on précisera, pour chacun, la nature de g.
   c. Déterminer l'ensemble (K) des points M tels que g soit une isométrie affine. On se bornera à donner l'équation de (K).

Partie B

On appelle P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et P^+ l'ensemble des points de P dont les coordonnées sont strictement positives.
On considère l'application $\varphi : P \to \text{P}^+$ telle que l'image par φ d'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ soit le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \text{e}^x \\ y' & = & \text{e}^y \end{array}\right.$$

(e étant la base des logarithmes népériens).

1. Montrer que φ est une bijection de P sur P^+. Existe-t-i! des points de P invariants par φ ?
2. Donner l'équation de $\varphi(D)$, image par φ de la droite (D) d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

   On précisera la nature et la position de $\varphi(D)$ dans les cas particuliers suivants :
   a. a (ou b) est nul.
   b. $a = b$.

Partie C

1. Montrer que l'image par φ du cercle de centre O et de rayon 1 est l'ensemble (K) défini au A 2. c).
2. Étudier les fonctions numériques :

$$y_1 = \text{e}^{\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}, \qquad y_2 = \text{e}^{-\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}.$$

   Déduire de leurs représentations graphiques le tracé de (K).
   Montrer que (K) admet la première bissectrice comme axe de symétrie. Calculer les coordonnées des intersections A et B de cette bissectrice et de (K).
   Déterminer les points de contact A′ et B′ de (K) avec les tangentes à (K) issues de O.
   Nature du quadrilatère AA′BB′.

Note : Les parties A et B sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. La partie C dépend partiellement de A et de B .