Baccalauréat C Limoges juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe 2i.
   Soit z un nombre complexe ; résoudre l'équation :

$$Z^2 - [(3-\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}]\,Z + 2(1-\mathrm{i})z^2 + (1+3\mathrm{i})z - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

   où l'inconnue est le nombre complexe Z.

2. Dans la plan complexe P, on note m, M' et M'' les images des nombres z, Z' et Z'', Z' et Z'' étant les racines de l'équation (E). On définit ainsi deux applications de P dans P, notées

$$f : m \longmapsto M' = f(m) \quad \text{et} \quad g : m \longmapsto M'' = g(m).$$

   Donner la nature géométrique de f et g et préciser leurs éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Dans le corps des classes résiduelles modulo 7 : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, dont les éléments seront notés

$$\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}$$

   résoudre l'équation $x = \dot{3}x + \dot{5}$.

2. On considère l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par $n \longmapsto u_n$ tel que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dot{3}u_n + \dot{5} \\ u_0 = \dot{2}. \end{cases}$$

   On pose $u_n = v_n + \dot{1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis u_n en fonction de n.
   Calculer u_{1977}.

PROBLÈME **12 POINTS**

On considère la fonction réelle à variable réelle f définie par :

$$f : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. **a.** Montrer que f est trois fois dérivable et calculer les dérivées successives f', f'', f'''.
   b. Étudier les fonctions f', f'', f''' et construire les courbes représentatives.
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par P_0, P_1, P_2, P_3 les fonctions telles que

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = -2x \quad ; \quad P_2(x) = 4x^2 - 2 \quad ; \quad P_3(x) = -8x^3 + 12x.$$

   a. Montrer que $(P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ est une base de E.
   b. Soit Q la fonction polynôme de E définie par $Q(x) = 3 - 10x + 4x^3$.
   Quelles sont les coordonnées de Q dans la base précédente ?

c. Calculer les trois nombres

$$A_i = \int_{-1}^{+1} P_i(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec } i \in \{1,\ 2,\ 3\}.$$

d. Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall T \in \mathrm{E}, \qquad \phi(T) = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.
On pose $A = \int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer A.
Calculer en fonction de A le nombre

$$B = \int_{-1}^{+1} Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si T est un élément de E, calculer en fonction de A :

$$C = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer la nombre de ϕ en fonction de A.

3. Soit P un plan affine rapporté à un repère orthonormé.
Soit M un point de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$ animé d'un mouvement défini par :

$$x(t) = f(t) \quad ; \quad y(t) = f'(t) \quad \text{avec } t \geqslant 0.$$

a. Déterminer l'équation de la trajectoire et la construire en précisant le sens de parcours.

b. Quels sont les vecteurs vitesse et accélération à l'instant t ? Pour $t_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, construire le représentant de ces vecteurs d'origine M_0.

c. Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire, le mouvement est accéléré ou retardé.
On donne $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6065$ et $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}2231$.